

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

SILVIA ALATORRE, ELSA MENDIOLA y LYDIA LÓPEZ



Aritmética

y algo más para estudiantes
de ciencias sociales

Horizontes
Educativos

Aritmética y algo más es un libro para aprender, pero no es un libro de texto, sino un material de consulta que puede ser de gran utilidad para estudiantes de ciencias sociales que requieren ciertos contenidos básicos de matemáticas, para la comprensión o aplicación de contenidos propios de su carrera; incluso puede ser de utilidad en el desarrollo de ciertas actividades profesionales.

El material está organizado en cinco capítulos: Números y orden, Operaciones, Letras en expresiones matemáticas, Cálculos, y Proporcionalidad y porcentaje. En cada uno se hace hincapié en los conceptos u operaciones que, por la experiencia docente en áreas de ciencias sociales, se consideran importantes y se ha visto que generan dificultades en los estudiantes.

Los cinco capítulos son independientes, es decir, para abordar cualquiera de ellos no se requiere leer o estudiar los anteriores. Contienen explicaciones cortas y sencillas, sin entrar a demostraciones formales; sin embargo, se incluyeron algunas explicaciones adicionales por si es de interés del lector la profundización de algún tema, mismas que están debidamente marcadas y no son necesarias para la comprensión del texto.

En todos los temas abordados se presentan ejemplos diversos para facilitar su comprensión o aplicación, y muchos ejercicios. Se parte del supuesto de que el lector tiene acceso a una calculadora científica que le permitirá resolver operaciones evitando lo tedioso que puede resultar la realización de ciertos cálculos o aplicaciones de fórmulas. En el manual se dan ciertas recomendaciones para el uso eficiente de la calculadora. Además, el lector podrá verificar si sus respuestas son correctas porque se incluyen las soluciones de todos los ejercicios y problemas.

Por último, para facilitar la consulta se incluye un índice temático que permite ubicar de forma fácil y rápida las definiciones o explicaciones que el lector considere necesarias.

Aritmética y algo más para estudiantes de ciencias sociales

*Silvia Alatorre Frenk
Elsa Mendiola Sanz
Lydia López Amador*



EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



Aritmética y algo más para estudiantes de ciencias sociales
Silvia Alatorre Frenk, Elsa Mendiola Sanz, Lydia López Amador

Primera edición, 17 de marzo de 2023

© Derechos reservados por la Universidad Pedagógica Nacional
Esta edición es propiedad de la Universidad Pedagógica Nacional, Carretera al Ajusco
núm. 24, col. Héroes de Padierna, Tlalpan, CP 14200, Ciudad de México
www.upn.mx

Esta obra fue dictaminada por pares académicos.

ISBN: 978-607-413-476-6

QA11.2
A43 Alatorre Frenk, Silvia
2003 Aritmética y algo más para estudiantes de ciencias sociales /
Silvia Alatorre Frenk, Elsa Mendiola Sanz, Lydia López Amador.
Ciudad de México : Universidad Pedagógica Nacional, 2023.
1 archivo electrónico (400 p.) ; 8 MB ; archivo PDF : tablas, cuadros, fórmulas.
(Horizontes educativos)

ISBN 978-607-413-476-6

1. Matemáticas – Estudio y enseñanza – Libros de texto. I. Mendiola Sanz,
Elsa. II. López Amador, Lydia. III. Serie

Queda prohibida la reproducción parcial o total de esta obra, por cualquier medio,
sin la autorización expresa de la Universidad Pedagógica Nacional.
Hecho en México.

ÍNDICE

PRESENTACIÓN	7
Estructura y uso del manual.....	8
Forma de uso del manual	9
Uso de la calculadora	10
 1. NÚMEROS Y SU ORDEN	 17
1.1. Números enteros	18
1.2. Números racionales	39
1.3. Números reales.....	74
 2. OPERACIONES.....	 91
2.1. Operaciones básicas	92
2.2. Operaciones con tres números especiales: 0, 1 y 10.....	135
2.3. Redondeo	145
2.4. Medición.....	160
 3. LETRAS EN EXPRESIONES MATEMÁTICAS	 187
3.1. Uso de letras en expresiones matemáticas	190
3.2. Subíndices y sumatorias.....	212

4. CÁLCULOS223

4.1. Jerarquía de las operaciones224

4.2. Números muy grandes y muy chicos
 en la calculadora235

4.3. Cálculo de fórmulas utilizando la calculadora241

4.4. Por qué es mejor hacer de corrido las operaciones
 y no con resultados parciales.....251

5. PROPORCIONALIDAD Y PORCENTAJES271

5.1. Proporcionalidad directa e inversa.....271

5.2. Problemas con proporciones293

5.3. Porcentajes306

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS339

ÍNDICE TEMÁTICO389

PRESENTACIÓN

Es sabido que muchos estudiantes de ciencias sociales les tienen aversión a las matemáticas o, cuando menos, se sienten inseguros ante ellas. Las razones de ello pueden ser múltiples; aquí no se pretende analizarlas ni, mucho menos, solucionar tal situación. Sin embargo, pensamos que para un adulto que llega al nivel universitario es relativamente sencillo adquirir los elementos propios para seguir cursos que requieren el manejo de matemáticas básicas.

Este manual está dirigido a personas que, como los estudiantes de ciencias sociales recién descritos, necesitan recuperar algunos elementos de aritmética, ya sea para solucionar problemas de la vida cotidiana o para proseguir en estudios que los requieran, por ejemplo, de Estadística. Está basado en explicaciones cortas y, sobre todo, en ejemplos y ejercicios. A su vez, los ejemplos y ejercicios presuponen que se tiene a la mano una calculadora: la intención es que este instrumento se convierta en una ayuda real, un cómplice, una herramienta que sea el mejor apoyo para los fines descritos. Es por ello que el manual le indicará al lector cómo utilizar la calculadora y, debe aclararse, cuando hablamos de “calculadora” nos referimos a una calculadora científica.

ESTRUCTURA Y USO DEL MANUAL

El manual está organizado en cinco capítulos:

- El primero consiste en una revisión de los números enteros o fraccionarios, positivos y negativos, así como el orden entre ellos.
- El segundo se enfoca en las operaciones, y culmina con algunas reflexiones acerca de los números en la vida diaria, incluyendo la conversión de unidades de medida.
- El tercero es una brevísima incursión por un campo que tradicionalmente se considera más del ámbito del álgebra que de la aritmética, y que se refiere al uso de letras en expresiones matemáticas, sobre todo en fórmulas.
- El cuarto contiene una serie de recomendaciones para hacer cálculos utilizando la calculadora.
- El quinto aborda la proporcionalidad, con énfasis en uno de los problemas más usuales de ella: los porcentajes.

Además, cada capítulo contiene varias secciones, que constan de distintos apartados.

Cada uno de los capítulos contiene ejercicios para apoyar el aprendizaje de los temas tratados.

➤ Al final hallarás también estos elementos:

- Respuestas a todos los ejercicios.
- Índice temático global.

Hemos intentado que la lectura del manual sea sencilla y que esté ilustrado con muchos ejemplos y ejercicios. El libro está estructurado de manera modular, de tal forma que cada capítulo pueda abordarse sin necesidad de revisar los anteriores; esto y el uso del índice temático te permitirá localizar y abordar fácilmente la información que necesites, dándole clic a las páginas indicadas.

FORMA DE USO DEL MANUAL

Te recomendamos fervientemente que sigas el manual con una calculadora a la mano: la intención es que este instrumento se convierta en una ayuda real, un cómplice, una herramienta que sea el mejor apoyo para el aprendizaje; e insistimos, cuando hablamos de “calculadora” nos referimos a una **calculadora científica**. En esta presentación hay unas indicaciones generales de cómo utilizar la calculadora. Si tú realizas con tu calculadora todas las operaciones que se indican en los diversos ejercicios de los capítulos, eso te permitirá ir conociendo tu calculadora y familiarizarte con ella.

Cada sección termina con un conjunto de **ejercicios**, cuyas **respuestas** están al final del libro, y la manera que te proponemos para realizar los ejercicios es la siguiente: hazlos cuando llegues a ellos y siempre que sea pertinente, utiliza tu calculadora. Si tus respuestas coinciden con las que aparecen en el apéndice, continúa con la lectura del manual. Si no coinciden, procura comprender dónde estuvo tu error. Para ello te puede ayudar releer la sección correspondiente y rehacer los ejemplos que vienen ahí mismo. Después vuelve a resolver los incisos donde tuviste error. Si aún persiste el fallo, procura recurrir a una ayuda externa (un maestro o un compañero).

Hemos procurado que siempre tengas manera de consultar las dudas que te vayan surgiendo. Una de las herramientas para ello es el **índice temático**. Se trata de un listado de palabras clave con las páginas donde puedes encontrar explicaciones acerca de ellas. El listado está en orden alfabético; algunas de las palabras tienen otras bajo sí mismas, que a su vez están en orden alfabético. El índice temático te permitirá ubicar esas explicaciones de una manera sencilla y cómoda..

Hemos incorporado en el texto principal solamente aquellas explicaciones que nos parecen fundamentales para entender lo que se está haciendo. Sin embargo, si tienes curiosidad de profundizar un poco, hemos incorporado también **explicaciones adicionales** que pueden aclarar algo más el tema que se esté tratando. Si así lo

deseas, puedes simplemente “brincarte” estas partes, o dejarlas para más tarde si el tema no te quedó tan claro como quisieras. Esas explicaciones adicionales están marcadas con una pantalla color durazno como la siguiente:



Como todo el manual se basa en el uso de una calculadora científica, en la siguiente sección haremos una introducción a su manejo. Otras características se irán mencionando a lo largo de los capítulos 1, 2 y 4.

USO DE LA CALCULADORA

Cuando hacemos mención de una “calculadora”, nos referimos a una calculadora científica. En el capítulo 4 se explica cuál es la característica fundamental de las calculadoras científicas en contraposición a las que no lo son.

Hay en el mercado muchas marcas y modelos de calculadora científica, con diferencias en la forma en que debe ingresarse la información, la ubicación de las teclas, y otras características. Por ello, resulta prácticamente imposible desde un texto como este dar indicaciones precisas para cada modelo de calculadora. Aquí nos vamos a referir a algunas de las funciones que tienen la mayoría de las calculadoras, y te indicaremos cómo usarlas, pero las especificaciones pueden ser distintas en cada caso. Nosotras recomendamos que leas con detenimiento el instructivo de tu calculadora, ya que eso es lo que te permitirá utilizarla con eficiencia. (Para facilitar la

lectura del manual, lo que se realiza en la calculadora se ha puesto en caracteres como estos: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 $\frac{\square}{\square}$).

Casi todas las calculadoras científicas tienen varios “modos” en los que pueden funcionar, y que se accionan con la tecla , que suele estar en la parte superior de la calculadora. Típicamente tienen, por lo menos, un “modo aritmético” y un “modo estadístico” (llamado SD); también suelen contar con un modo de regresión lineal (llamado REG o REG-LIN o LIN-REG o LR). Otras tienen modos financieros, ingenieriles, de variable compleja, etc., según el uso para el que están diseñadas. En este manual trabajaremos solamente con el modo aritmético, que en las calculadoras tipo Casio* se llama “COMP” (por “cómputo”) y en otras marcas se puede llamar “Normal” o “Básico”. En general, las calculadoras vienen de fábrica en el modo aritmético. En las calculadoras Casio y en otras que funcionan de la misma manera, el modo aritmético se pone pulsando la tecla  y luego el número (generalmente 1) que corresponde a COMP. Si esto no funciona en tu calculadora, consulta el instructivo.

Las calculadoras científicas tienen, junto a las diez teclas para los dígitos y una para el punto decimal, las teclas para las operaciones de suma , resta , multiplicación  y división , y junto a ellas el signo igual . Además, tienen teclas de paréntesis  y , y otras más, que están generalmente arriba de las primeras mencionadas. ¡Localiza todas esas teclas en tu calculadora!

La mayoría de las calculadoras incluyen dos usos distintos para muchas de las teclas: el que está indicado sobre la tecla misma (uso principal) y otro (secundario) que aparece arriba de la tecla, sobre el chasis de la calculadora, generalmente de un color distinto. Para que la tecla funcione con su uso principal basta con teclearla, pero

* En este manual hablamos frecuentemente de las calculadoras tipo Casio. La razón de ello es que muchas otras marcas siguen el tipo de notación y uso de las teclas de las Casio y son las más comunes en el mercado en México. Sin embargo, si tu calculadora es de otra marca, lo más probable es que gran parte de lo que digamos aquí funcione de la misma manera en tu calculadora. Cuando no ocurra así, consulta el instructivo.

para que funcione con su uso secundario es necesario pulsar previamente otra tecla que casi siempre se encuentra en el extremo superior izquierdo, cuyo nombre puede ser, por ejemplo, “” o “2nd” o “Fn”, y que suele estar indicado en el color de los usos secundarios. Por ejemplo, para calcular cuadrados y raíces cuadradas algunas calculadoras tienen dos teclas distintas, que se ven así:



mientras que otras calculadoras tienen una tecla que se ve así:

 (este símbolo aparece en color *arriba de* la tecla, no *sobre* ella)



Cuando hay dos teclas diferentes, una marcada  y una tecla , para calcular el cuadrado de 9 hay que teclear



o bien, dependiendo de la calculadora, simplemente:



y la calculadora da el resultado 81; mientras que el cálculo de la raíz cuadrada de 9 puede efectuarse, o bien así:



o bien así:



o bien así:



para que la calculadora dé el resultado 3. Es decir, incluso para las calculadoras que tienen dos teclas distintas, puede haber diferencias en el *orden en el que se teclean el número y la tecla de “raíz cuadrada”*, así como en el uso de la tecla .

En el segundo caso, o sea, cuando una sola tecla sirve para las dos funciones, de las cuales el cuadrado es la principal y la raíz cuadrada la secundaria, para calcular el cuadrado de 9 hay que teclear, como en el caso anterior,



o bien:

$$9 \quad \sqrt{} \quad x^2$$

y la calculadora da el resultado 81, mientras que el cálculo de la raíz cuadrada de 9 puede efectuarse así:

$$9 \quad \text{SHIFT} \quad \sqrt{} \quad x^2 \quad =$$

o bien así:

$$9 \quad \text{SHIFT} \quad \sqrt{} \quad x^2$$

o bien así:

$$\text{SHIFT} \quad \sqrt{} \quad x^2 \quad 9 \quad =$$

para que la calculadora dé el resultado 3.

Para averiguar de cuál de todos estos tipos es tu calculadora, tú puedes hacer el intento de calcular el cuadrado de 9 y la raíz cuadrada de 9, hasta obtener los resultados 81 y 3. También puedes consultar el manual de la calculadora para aprender cómo se efectúan dichos cálculos.

En este libro nosotras hablaremos de “teclas” independientemente de si la función es la principal o la secundaria. Es decir, haremos mención por ejemplo de “la tecla x^2 ” y de “la tecla $\sqrt{}$ ”. Si tu calculadora es de las que tienen la raíz cuadrada como función secundaria, tú debes recordar usar la tecla SHIFT (o 2nd, u otra) antes de la tecla en cuestión para calcular una raíz cuadrada.

Una manera sencilla de conocer cómo funciona tu calculadora es indicarle que haga un cálculo cuyo resultado tú ya sabes. Así, si usas los ejemplos anteriores, como ya sabes que $9^2=81$ y que $\sqrt{9}=3$, puedes verificar la forma de uso de la tecla haciendo esos cálculos, y después podrás repetir la forma para calcular, por ejemplo, 47.631^2 , o bien $\sqrt{0.02673}$. A lo largo del libro te iremos dando algunos ejemplos resueltos para que tú verifiques con tu calculadora cómo se usa.

En esos intentos, no le tengas miedo a la calculadora: es muy difícil que llegues a descomponerla. Por ejemplo, si tu calculadora es de las que requieren que primero pongas la raíz y luego el número, pero lo haces al revés, la calculadora te va a dar un mensaje de error. No te preocupes. Pulsa la tecla de borrar, que puede ser , o , o , y prueba nuevamente, hasta que encuentres el resultado deseado. Pero siempre ten en cuenta que se trata de una máquina que va a hacer exactamente lo que tú le pidas, según las reglas que ella tiene para entenderte. Por ejemplo, si tú quieres calcular $41+52$ y lo que tecleas es $41 + 5 =$, la calculadora te va a dar el resultado 46 en vez del resultado 93, por la simple y sencilla razón de que eso fue lo que le pediste: ¡ella no es adivina para saber que querías decir 52 y no 5...!

La calculadora debe ser tu principal aliada para la aplicación de las matemáticas: si la calculadora se encarga de la parte operativa, tú podrás utilizar tu capacidad mental para interpretar los resultados y comprender, de una manera amplia, lo que está ocurriendo en cada situación.

Dos breves recomendaciones adicionales para el uso de la calculadora:

- Una es acerca del uso de una calculadora propia o ajena. Como cada modelo de calculadora es distinto, cuando tú te acostumbras a usar una, es posible que al manejar otra los modos de manejo sean distintos. Las diferencias pueden ir desde la fuerza que se requiere para pulsar las teclas hasta el orden en que se ingresa la información, o aun algunos usos de la tecla . Cuando uno está acostumbrado a una calculadora puede cometer errores al usar otra; por ejemplo, si escribes 68 en una calculadora cuyas teclas son más “sensibles” que la tuya, es posible que la calculadora registre 6688, y si son menos “sensibles” quizá registre 8. Es entonces altamente recomendable que uses siempre la misma calculadora, y por supuesto, que te acostumbres a ella.

- La segunda es en caso de que te guste usar las uñas largas: no manejes directamente la calculadora con los dedos, sino con la goma de un lápiz, porque tu yema va a ir a una tecla, pero tu uña teclea la de arriba, ¡y ya no vas a saber qué tecleaste...!

Si bien a lo largo del manual te iremos haciendo indicaciones acerca del uso de la calculadora, sobre todo en los capítulos 1, 2 y 4, es muy importante que sigas todos los ejemplos y ejercicios con tu calculadora: el objetivo es que llegues a sentir absoluta familiaridad y confianza cuando la uses. La última sección del capítulo 4 está consagrada específicamente al uso de la calculadora para hacer cálculos de fórmulas; el último apartado del capítulo contiene, además, indicaciones acerca de otras funciones y teclas que puede ofrecer el instrumento.

1. NÚMEROS Y SU ORDEN

En este capítulo nos ocuparemos de estudiar los números y su orden y sus operaciones. Sin duda, has estudiado en la primaria, la secundaria y el bachillerato números de distintas clases. Los naturales, los enteros, los positivos, los negativos, las fracciones, los decimales... En una gran parte de las aplicaciones matemáticas –por ejemplo, en Estadística– se utilizan todos esos números: enteros, fracciones, decimales, tanto positivos como negativos. El conjunto de todos esos números se conoce como el conjunto de los números reales; para llegar a comprender globalmente las características que tienen estos números, hablaremos “poco a poco” de diversas clases de números y sus características específicas:

- En una primera sección veremos los números enteros. Primero los números naturales, que tú sin duda conoces bien. Esta sección nos servirá para repasar el sistema de numeración y el concepto de orden. Asimismo, nos servirá para empezar a utilizar la calculadora. A continuación hablaremos de números positivos y negativos.
- En la segunda sección hablaremos de dos maneras de fraccionar la unidad: las fracciones y los números decimales.
- El haber abordado las características de los números positivos y negativos y de los números enteros y fraccionarios, nos

permitirá tener una visión de conjunto de las propiedades de los números reales: es lo que haremos en la tercera sección. También se abordan en esta sección cómo son los intervalos de números reales.

En cada una de estas tres secciones veremos, además de los números propiamente dichos, un aspecto fundamental de ellos: cómo se ordenan. El siguiente capítulo está consagrado a las operaciones que se pueden hacer con los números.

1.1. NÚMEROS ENTEROS

1.1.1. Números naturales

Los números naturales son 0, 1, 2, 3, 4, 5..., 57..., 138..., 156974... Son los números que usamos, típicamente, para contar.

Cuando los números naturales son muy grandes se puede usar una coma cada tres cifras empezando desde la derecha. Por ejemplo: $56,708 = 56708$ y $904,670,581,312 = 904670581312$.

Cuando tú teclees un número en la calculadora, hazlo sin la coma de separación de miles. Por ejemplo, para sumar $1,234 + 56,789$ lo que debes teclear es 1234 $+$ 56789 $=$ y entonces la calculadora te da el resultado $58,023$. Observa si tu calculadora te da el resultado con la coma de separación entre miles o no, porque algunas calculadoras la usan y otras no.*

* Tal vez sabes que en algunos países el uso común de la coma y el punto es al revés de como se usa en México: en Europa, por ejemplo, se usa una coma decimal para separar la parte entera de los decimales y un punto para separar los miles. Algunas computadoras están configuradas según la usanza americana y otras según la usanza europea. Si deseas cambiar de una a otra en una PC con Windows, busca en el Panel de Control las opciones regionales y de lengua, y ahí escoge Español de México: a partir de ese momento el punto será decimal y la coma servirá para separar los miles. En cuanto a las calculadoras, si están compradas en México lo más probable es que sigan la costumbre de nuestro país.

Sistema de numeración



Aunque estamos acostumbrados a los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y a la manera de escribir los números, como 214 o 2009, esta no es más que una manera de escribirlos, que usamos porque es muy conveniente. Por ejemplo, podemos representar la cantidad de jirafas en el dibujo con 4 pero también con IV (como lo hacían los romanos), o con ●●●● (como lo hacían los mayas), o con 四 (como se hace en chino). El sistema que usamos ha sido heredado de la India antigua y está basado en agrupaciones de diez en diez. Tal vez te has preguntado por qué diez y no otro número: la razón es que tenemos diez dedos, y desde que el ser humano empezó a contar se ayudó con las manos para llevar las cuentas. Diez es entonces algo natural.

En nuestro sistema de numeración las agrupaciones reciben estos nombres:

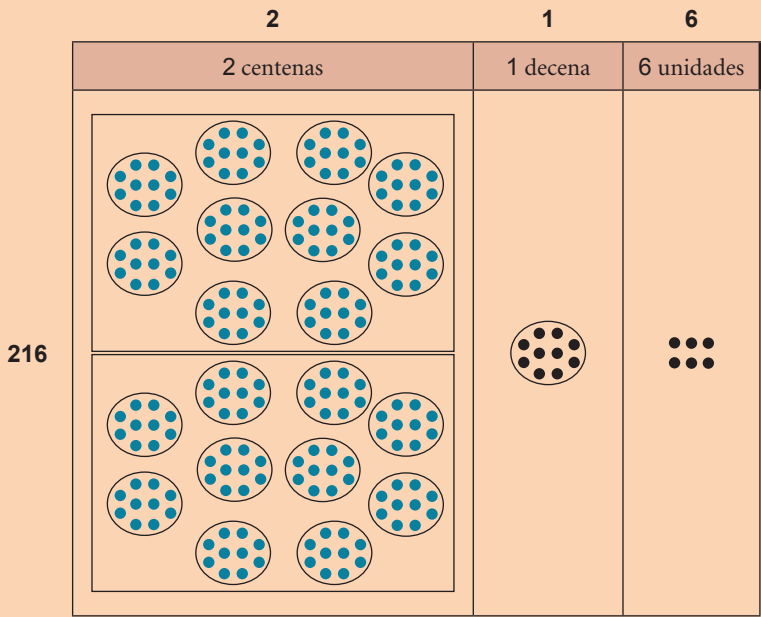
- una agrupación de diez unidades es una decena
- una agrupación de diez decenas es una centena
- una agrupación de diez centenas es un millar
- una agrupación de diez millares es una decena de millar
- una agrupación de diez decenas de millares es una centena de millar
- una agrupación de diez centenas de millar es un millón
- ...y continúa...

En el sistema escrito, a la derecha se representan las **unidades**, en el siguiente lugar a la izquierda de las unidades se representan las **decenas**, en el siguiente las **centenas**, y así sucesivamente.

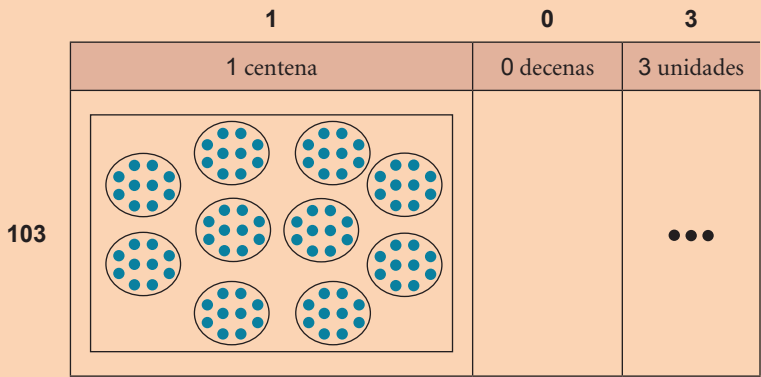


	millones	centenas de millar	decenas de millar	millares	centenas	decenas	unidades
...y continúa...	Un millón = 1,000,000 unidades	Una centena de millar = 100,000 unidades	Una decena de millar = 10,000 unidades	Un millar = 1,000 unidades	Una centena = 100 unidades	Una decena = 10 unidades	
	Un millón = 100,000 decenas	Una centena de millar = 10,000 decenas	Una decena de millar = 1,000 decenas	Un millar = 100 decenas	Una centena = 10 decenas		
	Un millón = 10,000 centenas	Una centena de millar = 1,000 centenas	Una decena de millar = 100 centenas	Un millar = 10 centenas			
	Un millón = 1,000 millares	Una centena de millar = 100 millares	Una decena de millar = 10 millares				
	Un millón = 100 decenas de millar	Una centena de millar = 10 decenas de millar					
	Un millón = 10 centenas de millar						

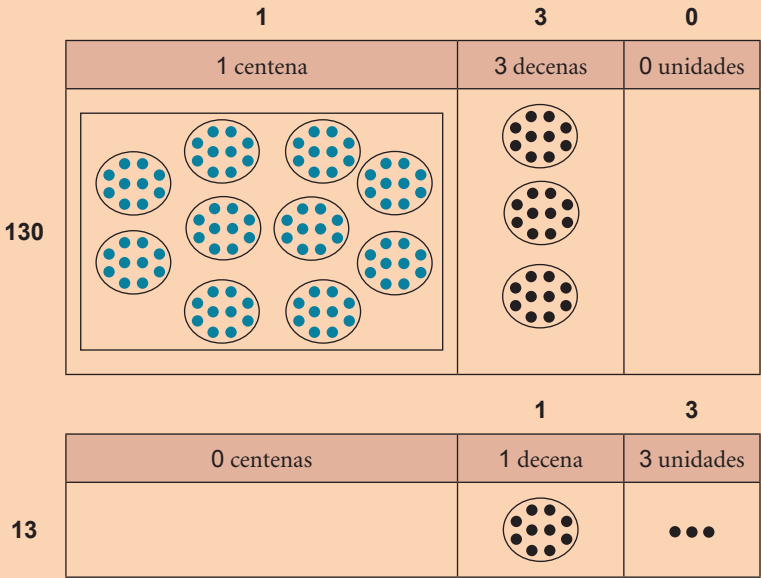
Así, por ejemplo, 216 significa que se tienen:



Se dice que el sistema de numeración es **posicional**, porque cada posición indica de qué nivel de agrupamiento estamos hablando. Cuando en algún nivel de agrupamiento no hay elementos, se coloca un **cero**. Así, el número 103 significa:



Como bien sabes, el número 103 es muy distinto de, por ejemplo, los números 130 y 13:



Observa que el número 13 es igual al número 013. También podríamos decir que este número tiene 0 millares, 0 decenas de millar, etcétera:

$$13 = 013 = 0013 = 00013 = 000013 = 0000013 = 00000013 = \dots$$

Sin embargo, por convención no escribimos los ceros a la izquierda.

Agregaremos aquí una observación acerca de la palabra “billón”. En español, un billón es un millón de millones; es decir, 1,000,000,000,000. En inglés, sin embargo, “*one billion*” es solamente mil millones, o sea 1,000,000,000. Es frecuente que los traductores desconozcan esta diferencia y que interpreten, por ejemplo, “*one billion dollars*” como “un billón de dólares”, cuando en realidad el texto se refiere a mil millones de dólares.

Orden

Dados dos números naturales, o bien son iguales o bien uno es mayor (más grande) que el otro. Para denotar el orden se usan los símbolos $<$, $=$ y $>$.

Nota: Si te confundes entre los símbolos $>$ y $<$, recuerda que cada uno tiene un “lado grande” y un “lado chico”.

“lado grande” $\uparrow \gg \uparrow$ “lado chico” “lado chico” $\downarrow \ll \downarrow$ “lado grande”

En cualquiera de los dos casos *el número mayor queda del “lado grande” del símbolo y el número menor queda del “lado chico” del símbolo*. Por ejemplo $8 > 5$ significa que 8 es mayor que 5, o bien, leído de derecha a izquierda, que 5 es menor que 8. Por su parte, $5 < 8$ significa que 5 es menor que 8, o leído de derecha a izquierda, que 8 es mayor que 5.

lado grande NÚMERO MAYOR $>$ lado chico NÚMERO MENOR	lado chico NÚMERO MENOR $<$ lado grande NÚMERO MAYOR
$8 > 5$	$5 < 8$
8 es mayor que 5 5 es menor que 8	5 es menor que 8 8 es mayor que 5

Si tienes dudas respecto a cuál de dos números es el menor, la calculadora puede ser una herramienta útil. Haz la resta entre estos números y observa el signo del resultado. Si este es positivo significa que el primer número que tecleaste es el mayor y si es negativo significa que es el menor. Por ejemplo:

$8 - 5 = 3$ significa que 8 es el mayor de los dos números: $8 > 5$	$5 - 8 = -3$ significa que 5 es el menor de los dos números: $5 < 8$
---	--

Desigualdades

También puede ocurrir que utilicemos los símbolos “<” y “>” cuando hablamos de números cuyo valor no conocemos, y que representamos con letras. No solamente hablaremos aquí de esos dos símbolos, sino también de los símbolos “≤” y “≥”. Por ejemplo, la siguiente tabla muestra cómo puede ser la relación entre un número desconocido, al que llamaremos x , y el número 4.

Podemos decir que...	...y escribir cualquiera de estas dos expresiones:	
• el número x es mayor que 4	$x > 4$	$4 < x$
• el número x es menor que 4	$x < 4$	$4 > x$
• el número x es mayor o igual que 4	$x \geq 4$	$4 \leq x$
• el número x es menor o igual que 4	$x \leq 4$	$4 \geq x$
• el número x es igual a 4	$x = 4$	$4 = x$
• el número x es distinto de 4	$x \neq 4$	$4 \neq x$

Aquí es pertinente llamar la atención sobre cuatro cuestiones:

- Cuando escribimos $x > 4$ o bien $4 < x$, nuestro interés está centrado en torno al número x , no en torno al número 4. Es por eso que la manera de leer cualquiera de esas dos expresiones no es necesariamente de izquierda a derecha, sino empezando por x . Es decir, el sujeto de nuestra frase es x (no 4), por lo que nos interesa decir que “ x es mayor que 4”, aunque también sea cierto que “4 es menor que x ”.
- La diferencia entre “menor” (<) y “menor o igual” (≤) es que en el segundo caso se puede hablar de igualdad y en el primero no. Por ejemplo, si decimos que $x < 4$, x no puede ser igual a 4, solamente puede ser menor que 4, pero si decimos que $x \leq 4$, x puede ser o bien menor que 4, o bien igual a 4. Algo análogo ocurre con la diferencia entre “mayor” (>) y “mayor o igual” (≥).

- Lo contrario de la igualdad = está dado por el signo $\neq$. Así, lo contrario de que x sea igual a 4 ($x = 4$) es que x es distinto de 4, es decir, $x \neq 4$.
- He aquí diversas expresiones de cada uno de los cuatro signos $>$, $<$, $\geq$, $\leq$. Observa que varias incluyen las palabras “más” o “menos”.

$x > 4$ (o bien, $4 < x$): si x es un número natural, x puede tomar los valores 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13...	• x es mayor que 4 • x es más que 4 • x es superior a 4 • x supera a 4 • x excede a 4
$x < 4$ (o bien, $4 > x$): si x es un número natural, x puede tomar los valores 0, 1, 2, 3	• x es menor que 4 • x es menos que 4 • x es inferior a 4 • x no llega a 4 • x no alcanza a 4
$x \geq 4$ (o bien, $4 \leq x$): si x es un número natural, x puede tomar los valores 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12...	• x es mayor o igual que 4 • x es 4 o más que 4 • x es por lo menos 4 • x es cuando menos 4
$x \leq 4$ (o bien, $4 \geq x$): si x es un número natural, x puede tomar los valores 0, 1, 2, 3, 4	• x es menor o igual que 4 • x es 4 o menos que 4 • x es cuando mucho 4 • x es a lo más 4 • x no supera a 4

Cuando estamos hablando de números desconocidos que denotamos con letras, como x , puede ocurrir también que queramos decir que cumplen simultáneamente dos relaciones de orden.

Por ejemplo, podemos decir que el número x es mayor o igual que 4 y además es menor que 10:

$$x \geq 4 \text{ y además } x < 10$$

Como entonces lo que ocurre es que x está entre 4 y 10, la forma usual de expresar esta doble relación es la siguiente:

$$4 \leq x < 10$$

Como aquí estamos suponiendo que x es un número natural, eso quiere decir que x puede tomar el valor de cualquier número que sea mayor o igual que 4 y además menor que 10, es decir:

x puede tomar los valores 4, 5, 6, 7, 8, 9

Observa entonces que no conviene leer la expresión $4 \leq x < 10$ de izquierda a derecha, sino que es mejor leerla en un orden que obedece a que **nuestro interés está centrado en torno a x** : empezamos con x , luego vamos hacia la izquierda y luego hacia la derecha, como se ilustra en el siguiente cuadro:

Mejor <i>no</i> leer así:	Mejor <i>sí</i> leer así:
 $4 \leq x < 10$ 4 es menor o igual que x menor que 10	 $4 \leq x < 10$ x es mayor o igual que 4 y menor que 10

En general, entonces, si a , b y x son números, y el que nos interesa es x ,

🗉 La expresión $a < x < b$ se lee “ x es mayor que a y menor que b ”

Nota: También podríamos representar que el número x cumple la doble relación $4 \leq x < 10$ utilizando la expresión $10 > x \geq 4$, pero esto no es lo usual. Lo usual es poner el número más pequeño (en este caso 4) a la izquierda y el número más grande (en este caso 10) a la derecha.

Recta numérica

Para representar gráficamente los números se utiliza la **recta numérica**. En la recta se determinan un punto de referencia, que puede ser el correspondiente al 0 o a otro número, y un segmento que represente a la unidad, es decir, a la distancia entre dos números consecutivos, por ejemplo entre 0 y 1, 3 y 4, 10 y 11. También puede considerarse como referencia un segmento que represente 2, 5, 10, 100... unidades, la elección depende de los números que se quiera representar. Sin embargo, una vez elegido un segmento de referencia, este debe mantenerse constante mientras se utilice esa recta numérica.

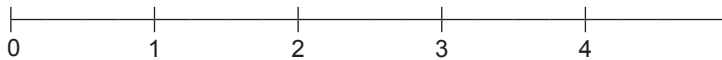
La recta puede ser horizontal o vertical:

- Si es horizontal los números menores se representan a la izquierda y los mayores a la derecha.
- Si la recta es vertical, los números menores se representan abajo y los mayores arriba.

En general, la recta numérica se representa con una flecha que indica hacia dónde se encuentran los números más grandes:



Pero también puede representarse sin la flecha:



A continuación se muestran algunos ejemplos:

a) Representación de los números: 0, 2, 3, 6, 7, 9

- Punto de referencia: 0
- Segmento de referencia: $\overline{\hspace{1cm}}^{1u}$



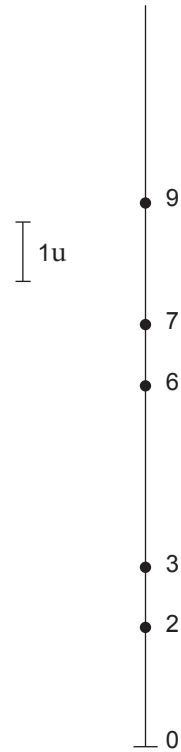
Observa que aun cuando no representamos los números 1, 4, 5 y 8, les estamos “dejando su lugar”: así, la distancia entre 2 y 6 es cuatro veces la distancia entre 2 y 3

b) Representación nuevamente de los números: 0, 2, 3, 6, 7, 9, con otra escala (es decir, con otro segmento de referencia):

- Punto de referencia: 0
- Segmento de referencia: $\overline{\hspace{1cm}}^{1u}$

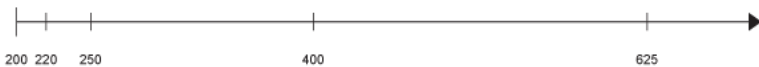


- c) Si utilizamos una recta vertical, manteniendo la misma unidad, es decir, considerando el mismo segmento de referencia, la representación anterior queda del siguiente modo:



- d) Representación de los números: 220, 250, 400, 625

- Punto de referencia: 200
- Segmento de referencia: en este caso el segmento de referencia representa 1 centena (100 unidades)



1.1.2. Los números enteros: positivos, negativos y el cero

En el apartado anterior se habló de números positivos, es decir, números mayores que 0. También hay números menores que 0: se llaman números **negativos** y se escriben anteceditos por el signo $-$. En cuanto al 0, no es ni positivo ni negativo.

Los números negativos permiten expresar cantidades menores que 0. Por ejemplo, sabemos que 0° C indica la temperatura en la que el agua se congela (cero grados Celsius), pero también sabemos que la temperatura alcanza valores inferiores. Es común, durante los meses de invierno, escuchar que la temperatura mínima en ciertas zonas del país fue de 2, 3 o 5 grados bajo cero; estos valores se pueden expresar, respectivamente, como -2 , -3 y -5 .

Observa que en estos casos la temperatura deberá incrementarse en 2, 3 o 5 grados para llegar al 0. En el ejemplo queda claro, también, que -5° es una temperatura más baja (menor) que -3° , es decir que $-5 < -3$.

Cuando un número no tiene signo, se entiende que es positivo. Cuando se habla de números positivos y negativos, es frecuente que se enfatice la diferencia poniendo el signo $+$ ante un número positivo: $+8 = 8$.

En las calculadoras científicas suele ocurrir que el signo $-$ para números negativos esté en una tecla distinta del signo $-$ para la operación de resta. En las calculadoras tipo Casio, el signo para negativos está a la izquierda arriba de los números y tiene la marca $(-)$. Verifica esto: tecléa $(-)$ 5 $=$ en tu calculadora y observa qué resultado da. También puede ocurrir que las calculadoras tengan, en vez de la tecla $(-)$, la tecla $+/-$.

A veces se ponen los números negativos entre paréntesis. Así, (-5) es lo mismo que -5 . Esto es particularmente útil al expresar operaciones con números negativos. Al respecto, cabe anotar que en algunas operaciones esos paréntesis son necesarios y en algunas no lo son. Por ejemplo, en la calculadora se puede sumar los números 8 y -5 de cualquiera de estas dos formas: 8 $+$ $(-)$ 5 $=$ y

$8 + ((-5)) =$, por lo que en ese caso los paréntesis no son necesarios, pero el resultado no cambia si se utilizan. En cambio, para elevar el número -5 al cuadrado sí necesitamos usar paréntesis: $((-5))^2 =$. Por esta razón, nosotras sugerimos que siempre, al hacer operaciones en la calculadora, se pongan entre paréntesis los números negativos con los que se está operando.

Ya hemos visto que podemos darles valores numéricos a las letras. Por ejemplo, podemos decir que $x = 8$, pero también podemos decir que $z = -3$. Observa que quien toma el valor -3 es la letra z , y no la expresión $-z$. Si x y z son como dijimos aquí, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} x = 8 & \quad \text{y entonces} \quad -x = -8 \\ z = -3 & \quad \text{y entonces} \quad -z = 3 \end{aligned}$$

Es decir, lo que hace el símbolo $-$ es cambiar el signo del número: si un número cualquiera, digamos n , es positivo, entonces $-n$ es negativo, y si n es negativo, entonces $-n$ es positivo. Verifica esto con tu calculadora, por ejemplo con los dos valores de arriba: teclea $(-) 8 =$ y observa qué resultado da, y luego teclea $(-) (-) 3 =$ o bien $(-) ((-)) 3 =$ y observa qué resultado da.

- ¿Cuándo es positivo y cuándo es negativo un número? En ocasiones esto depende del punto de vista. Por ejemplo, los estados de cuenta de las tarjetas de crédito bancarias se refieren a adeudos, es decir a cantidades que el tarjetahabiente debe pagar al banco. El saldo indicado en el estado de cuenta refleja el punto de vista del banco, como lo muestran las siguientes ilustraciones: El saldo de Juan es positivo, lo que indica que *el banco* recibirá un dinero que Juan le debe, pero desde el punto de vista de Juan, él tiene una cantidad negativa de dinero. En cuanto a María, su saldo negativo indica que ahora es *el banco* el que le debe a ella, y que ella puede contar con esa cantidad como si fuera saldo a favor suyo.



Orden

Cuando se trata de números positivos y negativos, ocurre lo siguiente:

- Todos los números negativos son menores que los positivos.
Ejemplos:
 - $-2 < 1$
 - $-2 < 6$
- Entre dos números negativos, la relación de orden es *al revés* de como se daría entre sus equivalentes positivos.
Ejemplos:
 - $-2 < -1$
 - $-2 > -6$
- Todos los números positivos son mayores que el cero y todos los negativos son menores que el cero.
Ejemplos:
 - $1 > 0$, $2 > 0$, $6 > 0$
 - $-1 < 0$, $-2 < 0$, $-6 < 0$

La calculadora puede ser una herramienta útil para saber cuál de dos números enteros es menor, de una manera similar a como lo vimos entre los números naturales:

Haz la resta entre los dos números y observa el signo del resultado. Si este es positivo significa que el primer número que te cleaste es el mayor y si es negativo significa que es el menor. Por ejemplo, para comparar los dos números negativos -8 y -5

$$\begin{array}{c} (-) 8 - ((-) 5) = -3 \\ \text{significa que} \\ -8 \text{ es el } \mathbf{menor} \\ \text{de los dos números:} \\ -8 < -5 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (-) 5 - ((-) 8) = 3 \\ \text{significa que} \\ -5 \text{ es el } \mathbf{mayor} \\ \text{de los dos números:} \\ -5 > -8 \end{array}$$

Como lo hicimos en el caso de los números positivos, podemos hablar de cómo es un número x desconocido con respecto a uno o dos números conocidos. Veamos dos ejemplos:

- Tanto la expresión $x > -5$ como la expresión $-5 < x$ se leen “ x es mayor que -5 ”. Si x es un número entero, esto quiere decir que x puede valer $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots$
- La expresión $-6 \leq x < 4$ se lee “ x es mayor o igual que -6 y menor que 4 ”. Si x es un número entero, esto quiere decir que x puede valer $-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2$ o 3

Observa que si x es un número entero cualquiera, puede ser positivo o negativo. Por ejemplo, si decimos que un número entero x es tal que $-2 \leq x \leq 3$, estamos indicando que x puede asumir los valores $-2, -1, 0, 1, 2$ o 3 : en un extremo tendríamos $x = -2$ y en el otro tendríamos $x = 3$.

De manera análoga $-x$ puede ser un número positivo o negativo; aquí el signo “ $-$ ” significa que $-x$ tiene el signo contrario al de x . Por ejemplo, si $-x = -6$, entonces $x = 6$, y si $-x = 8$, entonces $x = -8$. Así, si tenemos la desigualdad $-2 \leq -x \leq 3$, estamos indicando que $-x$ puede asumir los valores $-2, -1, 0, 1, 2$ o 3 : en un extremo tendríamos $-x = -2$ y en el otro tendríamos $-x = 3$; es decir, en un extremo tendríamos $x = 2$ y en el otro tendríamos $x = -3$.

De esta manera, cuando nos referimos a expresiones como

$$-x > 5,$$

debemos tener cuidado porque esto significa que

los posibles valores de $-x$ son 6, 7, 8, 9...

por lo tanto

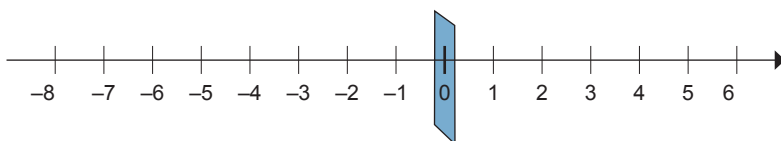
los posibles valores de x son $-6, -7, -8, -9...$

y eso corresponde a la siguiente expresión, equivalente a $-x > 5$:

$$x < -5.$$

Recta numérica

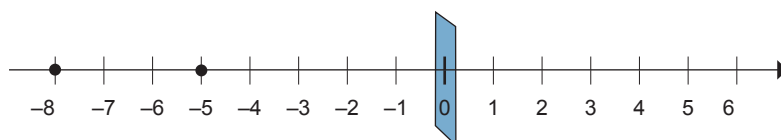
Podemos imaginar la recta numérica de los números enteros como si tuviera un espejo en el cero:



Con esta imagen se pueden recuperar las principales características de los números enteros en la recta numérica:

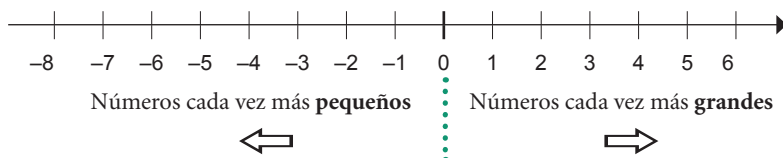
- Todos los negativos están a la izquierda del 0 (o, si la recta es vertical, abajo del 0) y todos los positivos están a la derecha (o arriba)
- Si dos números están representados en la recta numérica, el menor es el de la izquierda (o el de abajo)

Observa, por ejemplo, la ubicación de los números -8 y -5 en la recta numérica:



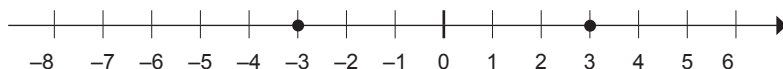
Es decir, si nos ubicamos en la recta en el número cero, al ir hacia la derecha tenemos números cada vez más grandes (como entre

los números naturales), y al ir hacia la izquierda tenemos números cada vez más pequeños. Los números enteros se pueden entonces representar con el siguiente esquema:



Valor absoluto

A la distancia entre el punto que representa en la recta cualquier número y el cero la llamamos **valor absoluto** del número. Observa que como 3 y -3 están a la misma distancia del cero, ambos tienen el mismo valor absoluto:



En general, el valor absoluto de un número y el de su negativo siempre es el mismo.

Representamos el valor absoluto de un número con rayas verticales antes y después del número. Así, el valor absoluto de -3 se escribe $|-3|$, y tenemos que:

$$|-3| = 3.$$

Pero, como vimos, el valor absoluto de 3 también es 3, es decir

$$|3| = 3.$$

Y lo que geométricamente se expresa como que la distancia de -3 al cero y de 3 al cero es la misma, se escribe así:

$$|-3| = |3| = 3.$$

Como el valor absoluto es una distancia, siempre es un número positivo. Esa distancia es cada vez más grande a medida que nos alejamos del cero en cualquier dirección, por lo que:

- entre los números positivos, mientras más grande sea el número, mayor es también su valor absoluto, y
- entre los números negativos, mientras más pequeño sea el número, mayor es su valor absoluto.

En general, las calculadoras científicas no tienen una tecla para calcular el valor absoluto (aunque hay algunas calculadoras que sí lo tienen, generalmente marcada con la tecla **ABS**)

EJERCICIOS

Recuerda que los ejercicios con numeración par son similares a los que los preceden. Haz solamente aquellos que consideres necesarios para tu proceso de aprendizaje.

1.01. Realiza con tu calculadora las siguientes operaciones y expresa el resultado con palabras:

- a) Ocho mil doscientos tres, más doce mil noventa y siete
- b) Ciento veintitrés millones cuatrocientos cincuenta y seis mil setecientos ochenta y nueve, más novecientos ochenta y siete millones seiscientos cincuenta y cuatro mil trescientos veintiuno
- c) Trescientos un millones cien mil cien, menos trescientos millones ciento un mil uno
- d) Diez mil doscientos, menos cinco mil ciento treinta
- e) Cincuenta mil veintiuno, por mil tres
- f) Noventa y ocho mil quince, por doscientos cuarenta y cinco
- g) Quince millones quince mil quince, entre quince
- h) Dos millones veinticuatro mil cuarenta, entre cuarenta
- i) Mil uno al cuadrado
- j) Raíz cuadrada de doscientos cincuenta y un mil uno

1.02. Realiza con tu calculadora las siguientes operaciones y expresa el resultado con palabras:

- a) Cuatrocientos noventa y nueve al cuadrado
- b) Raíz cuadrada de un millón cuarenta mil cuatrocientos
- c) Un millón cincuenta mil treinta, más quinientos mil ocho
- d) Ochocientos cuarenta mil siete, menos seiscientos cuarenta y cinco mil veinte
- e) Mil un millones ciento diez mil ciento cuarenta y cuatro, entre cincuenta mil cuarenta y ocho
- f) Ochocientos ocho mil ocho, más setecientos siete mil siete
- g) Dos mil millones cincuenta y seis mil, menos ciento treinta y dos millones novecientos trece
- h) Raíz cuadrada de diez mil doscientos un millones doscientos dos mil uno
- i) Cincuenta mil cinco al cuadrado
- j) Ciento un mil trescientos, por veinte mil treinta
- k) Setecientos un millones noventa y siete mil, más trescientos millones tres mil
- l) Doscientos ocho mil, por veinte mil ocho
- m) Doscientos mil ocho, más ochenta mil veinte
- n) Diez millones, menos un millón trescientos sesenta y nueve mil setenta y cinco
- o) Mil cinco al cubo
- p) Trescientos mil cuarenta y siete, más cuarenta y cinco mil setecientos tres, menos ciento cuarenta y cinco mil setecientos cuarenta y seis

1.03. Indica cómo se lee cada una de las expresiones siguientes y qué valores puede tomar x si sabemos que es un número entero:

- | | | |
|-----------------|----------------------|---------------------|
| a) $x > 3$ | f) $0 \leq x \leq 5$ | k) $-x = 2$ |
| b) $x \leq 5$ | g) $20 \leq x < 30$ | l) $-x > 3$ |
| c) $x < -4$ | h) $13 < x < 15$ | m) $-x \leq -6$ |
| d) $x \geq -10$ | i) $-7 \leq x < 4$ | n) $-x \geq 0$ |
| e) $x > -8$ | j) $-11 < x \leq -1$ | o) $-2 < -x \leq 0$ |

1.04. Indica cómo se lee cada una de las expresiones siguientes y qué valores puede tomar x si sabemos que es un número entero:

- | | | |
|-------------------|------------------------|--------------------------|
| a) $x < 6$ | g) $0 \leq x < 5$ | m) $-8 \leq -x \leq -3$ |
| b) $-x \geq 100$ | h) $-5 < x < 0$ | n) $-12 < x \leq -9$ |
| c) $-x > 0$ | i) $-5 \leq x \leq 5$ | o) $125 < -x < 132$ |
| d) $x \leq 0$ | j) $-5 < -x < 5$ | p) $-215 \leq -x < -200$ |
| e) $0 < x < 5$ | k) $-5 < x \leq 5$ | q) $0 \leq -x < 3$ |
| f) $0 < x \leq 5$ | l) $20 \leq x \leq 20$ | r) $0 < -x \leq 3$ |

1.05. Para cada inciso representa en una recta los números que se indican. En cada caso representa los números en dos rectas numéricas: una horizontal y una vertical, eligiendo cada vez unidades convenientes.

- 4 ; 8 ; -10 ; -7 ; 2 ; 6
- 1200 ; -5450 ; 1025 ; 3340
- 1,250,000 ; 2,500,000 ; 5,000,000 ; 18,000,000
- 125 ; 148 ; -150 ; 175 ; 100 ; -50 ; -18 ; 20
- 16,000 ; 25,000 ; 34,000 ; 8,000 ; 12,000 ; 30,000

1.06. Para cada inciso representa en una recta los números que se indican. En cada caso representa los números en dos rectas numéricas: una horizontal y una vertical, eligiendo cada vez unidades convenientes.

- a) 450,000 ; 475,000 ; 425,000 ; 430,000 ; 400,000 ; 410,000
- b) 28 ; 15 ; 53 ; 45 ; 30
- c) -8 ; -2 ; -5 ; -15 ; -35 ; -19
- d) 28 ; 46 ; 70 ; 95
- e) 1 ; -3 ; 5 ; 0 ; -10 ; 6
- f) -12 ; 15 ; 9 ; -17 ; 20 ; -2 ; 0
- g) 1107 ; 1035 ; 1009 ; 1080 ; 1053 ; 999
- h) -30,567 ; -30,098 ; -30,104 ; -30,200 ; -29,990
- i) 108 ; -115 ; -125 ; 140 ; 117 ; -96 ; 110
- j) -3,250,000 ; -5,000,000 ; -4,750,000 ; -6,500,000 ;
-1,000,000 ; -1,500,000
- k) 20,100 ; 20,111 ; 20,001 ; 20,010
- l) 135 ; 150 ; -75 ; -140 ; 195 ; 55 ; -15
- m) 2050 ; 2150 ; 1950 ; 2350 ; 2005 ; 1995 ; 2200
- n) -80 ; -5 ; -135 ; -100 ; -210 ; -175 ; -110
- o) 10,000 ; -20,000 ; -35,000 ; 15,000 ; -5,000 ; -7,000
- p) -140,000 ; -80,000 ; -125,000 ; -150,000 ; -200,000
- q) 645 ; 680 ; 725 ; 690 ; 710 ; 750 ; 655
- r) 2020 ; 1860 ; 2000 ; 1950 ; 2010 ; 1920 ; 1995
- s) -32 ; 25 ; -14 ; 15 ; 19 ; -3 ; -28 ; -12
- t) -600 ; -590 ; -470 ; -575 ; -380 ; -425
- u) 438 ; 450 ; 460 ; 560 ; 390 ; 505 ; 344

1.2. NÚMEROS RACIONALES

Los números racionales, a veces llamados fraccionarios, surgen frente a la necesidad de tener cantidades menores que la unidad; es decir, expresan lo que ocurre cuando una unidad se fragmenta en

varias partes iguales, y de ellas se consideran algunas. Para describir este proceso es necesario indicar, de manera puntual, tres cosas:

-  Que la unidad se va a partir
-  En cuántas partes se parte
-  Cuántas de esas partes se consideran

Las dos formas más usuales para expresar que fragmentamos la unidad son las fracciones –también llamadas “quebrados”– y los números decimales. (Hay otra manera que también es usual en la vida cotidiana: la que se usa para hablar de tiempo, en particular de minutos y segundos. Se verá en el capítulo 2).

1.2.1. Fracciones

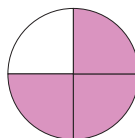
Una fracción es una expresión de la forma $\frac{a}{b}$, donde b es un número distinto de cero (llamado el **denominador**) que representa la cantidad de *partes iguales* en las que se ha partido una unidad, y a es un número (llamado el **numerador**) que representa la cantidad de esas partes que se consideran. Es decir, en una fracción como $\frac{a}{b}$, los números a y b son enteros y b es distinto de cero.

De esta manera, se expresa:

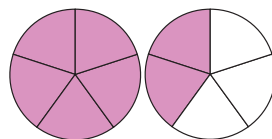
-  Que la unidad se va a partir, mediante una rayita horizontal
-  En cuántas partes se parte, mediante un número debajo de esa rayita
-  Cuántas de esas partes se consideran, mediante un número arriba de la rayita

Por ejemplo:

- En $\frac{3}{4}$, el numerador es 3 y el denominador es 4, lo que significa que se ha partido la unidad en cuatro partes y que de ellas se han considerado tres. La representación usual mediante “pasteles” es la que se muestra a la derecha.

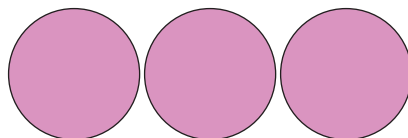


- $\frac{7}{5}$ significa que se ha partido la unidad en cinco partes y que de ellas se han considerado siete; es decir, más de una unidad. La representación usual mediante “pasteles” es la que se muestra a la derecha.



En este caso la fracción se refiere a un número más grande que la unidad.

- $\frac{3}{1}$ significa que se ha “partido” la unidad en una parte y que de ella se han considerado tres; es decir, la unidad no se parte y se han considerado tres unidades. En este caso la fracción es un número entero. Es decir, el número entero 3 puede ser considerado como una fracción de este tipo: $\frac{3}{1} = 3$. En general, cualquier número entero m puede ser considerado como una fracción del tipo $\frac{m}{1}$.



En algunas ocasiones se usa la diagonal / para representar las fracciones. Por ejemplo, $\frac{3}{4}$ y $\frac{7}{5}$ se pueden expresar como $3/4$ (o bien, $3/4$) y $7/5$ respectivamente.

Cuando una fracción es más grande que la unidad, como $\frac{7}{5}$, se puede expresar también como la cantidad de unidades más las

fracciones menores de la unidad. Así, $\frac{7}{5}$ se puede expresar también como $1+\frac{2}{5}$. La manera usual de representar esto es prescindiendo del signo “+”; es decir $\frac{7}{5}=1\frac{2}{5}$. A este tipo de fracciones se las conoce como “fracciones mixtas”, y las fracciones mayores de la unidad son conocidas también en ocasiones como “fracciones impropias”. Otro ejemplo de una fracción mixta: $2\frac{3}{4}$, que también se puede escribir como $2\frac{3}{4}$, es dos unidades más tres cuartas partes de una unidad.

Cómo se leen las fracciones

Para leer una fracción se lee la cantidad de partes (el numerador) y el tamaño de esas partes (el denominador). Este último se lee según la siguiente convención:

Los denominadores	Se leen	Ejemplos
2	Medios o mitades	$\frac{3}{2}$ tres medios (o tres mitades)
3	Tercios o terceras partes	$\frac{2}{3}$ dos tercios o dos terceras partes
4	Cuartos o cuartas partes	$\frac{8}{4}$ ocho cuartos
5	Quintos o quintas partes	$\frac{1}{5}$ un quinto
6	Sextos o sextas partes	$\frac{6}{6}$ seis sextos
7	Séptimos o séptimas partes	$\frac{9}{7}$ nueve séptimos
8	Octavos u octavas partes	$\frac{1}{8}$ un octavo
9	Novenos o novenas partes	$\frac{7}{9}$ siete novenos
10	Décimos o décimas partes	$\frac{4}{10}$ cuatro décimos

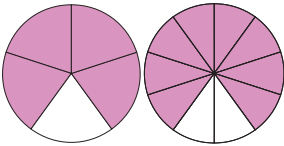
Continuación

Los denominadores	Se leen	Ejemplos
100	Centésimos	$\frac{40}{100}$ cuarenta centésimos
1,000 10,000 100,000 1,000,000 etc.	Milésimos, diezmilésimos, cienmilésimos, millonésimos, etc.	$\frac{432}{1000}$ cuatrocientos treinta y dos milésimos $\frac{2}{1000000}$ dos millonésimos
Todos los demás	...avos	$\frac{9}{11}$ nueve onceavos $\frac{25}{37}$ veinticinco treintaisieteavos

Fracciones equivalentes

Dos fracciones son equivalentes si denotan la misma cantidad.

- Por ejemplo, $\frac{4}{5}$ es equivalente a $\frac{8}{10}$.
Esto lo podemos ver en la representación de “pasteles” de la derecha: ambos tienen la misma área sombreada. Escribimos:



$$\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$$

Hay dos problemas básicos en lo que se refiere a fracciones equivalentes: 1) saber si dos fracciones son equivalentes, y 2) encontrar una fracción equivalente a una fracción conocida.

El primer problema se puede resolver de varias maneras, que se ejemplifican a continuación con las fracciones $\frac{4}{5}$ y $\frac{8}{10}$. Dos fracciones son equivalentes:

Maneras de verificar	Ejemplo con $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$
• Cuando el numerador y el denominador de una de las dos fracciones se obtienen multiplicando o dividiendo el numerador y el denominador de la otra por el mismo número (que no sea cero).	El factor 2 es el mismo en $4 \times 2 = 8$ y en $5 \times 2 = 10$: $\frac{4}{5} \xrightarrow{\times 2} \frac{8}{10}$
• Cuando al dividir el numerador entre el denominador se obtiene exactamente el mismo resultado en las dos fracciones.	En la calculadora, $4 \div 5 = 0.8$ y $8 \div 10 = 0.8$
• Cuando al dividir una entre la otra se obtiene el resultado 1.	En la calculadora (¡usando paréntesis para indicar cada fracción!) $(4 \div 5) \div (8 \div 10) = 1$ O bien $(8 \div 10) \div (4 \div 5) = 1$

Nota: Otra manera para reconocer fracciones equivalentes es con los llamados “productos cruzados”. En el ejemplo de arriba, los productos cruzados son 5×8 y 4×10 ; la equivalencia de las fracciones se nota porque ambos productos tienen el mismo resultado, que en este caso es 40.

El segundo problema que suele presentarse es cuando necesitamos encontrar una fracción equivalente a una fracción conocida. Para lograrlo, lo más sencillo es uno de estos dos procedimientos:

- Multiplicar el numerador y el denominador por el mismo número. Por ejemplo, las siguientes fracciones son todas equivalentes a $\frac{3}{7}$: hemos multiplicado tanto el numerador como el denominador de $\frac{3}{7}$ por 2, por 3, por 4, por 5..., etc:

$$\frac{3}{7} = \frac{6}{14} = \frac{9}{21} = \frac{12}{28} = \frac{15}{35} = \dots$$

He aquí otro ejemplo: ahora hemos multiplicado sucesivamente por 10 el numerador y el denominador:

$$\frac{4}{10} = \frac{40}{100} = \frac{400}{1000} = \frac{4000}{10000} = \frac{40000}{100000} = \dots$$

- Dividir el numerador y el denominador entre el mismo número. Por ejemplo, si dividimos el numerador y el denominador de $\frac{90}{240}$ entre 2, obtenemos $\frac{90}{240} = \frac{45}{120}$. Estos números no los podemos ya dividir entre 2, pero sí, por ejemplo, entre 5: $\frac{45}{120} = \frac{9}{24}$. Y ahora podemos dividir entre 3: $\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$. Entonces, todas estas fracciones son equivalentes: $\frac{90}{240} = \frac{45}{120} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$, y como hemos ido reduciendo los números que aparecen en el numerador y en el denominador, decimos que estamos *simplificando* la fracción. La última que encontramos, $\frac{3}{8}$, ya no puede ser simplificada, porque no hay ningún número entre el que podamos dividir tanto 3 como 8 y obtener un resultado entero.

Puede ser importante señalar que cuando se simplifica una fracción, como en el ejemplo anterior, no se está encontrando una fracción “más pequeña”. Aunque tanto el numerador como el denominador son números más pequeños que los originales, la fracción resultante es igual a la original, justamente porque son fracciones equivalentes: $\frac{90}{240} = \frac{3}{8}$.

Por otra parte, la mejor manera de manejar las fracciones mixtas, cuando hay que operar con ellas o compararlas, es mediante una fracción equivalente. Por ejemplo, en vez de $1\frac{2}{5}$ usaremos la fracción equivalente $\frac{7}{5}$; en vez de $2\frac{3}{4}$ usaremos la fracción equivalente $\frac{11}{4}$ (porque como $2 = \frac{8}{4}$, al sumar los cuartos nos quedan $\frac{11}{4}$). Cabe aclarar que algunas calculadoras manejan fracciones mixtas:

consulta el instructivo de la tuya si te ves en la necesidad de operar con fracciones mixtas.

Significados de las fracciones

Hasta ahora hemos hablado de las fracciones como una clase particular de números, que representan que una unidad se ha fragmentado en varias partes y cuántas de ellas se han considerado, pero las fracciones pueden tener varios significados. A continuación, veremos brevemente los más usuales:

- ***La fracción puede ser considerada como un número.*** Por ejemplo:
 - Cuatro quintas partes de la unidad se escribe $\frac{4}{5}$ y dos tercias partes de la unidad se escribe $\frac{2}{3}$.
- ***La fracción puede ser considerada como un cociente.*** Las fracciones se utilizan tanto para expresar una división como para expresar el cociente o resultado de una división. Por ejemplo:
 - Se elaboraron 3 kilos de mermelada de fresa que se envasó para su venta en 12 frascos de igual tamaño. Si nos preguntamos cuánto se envasó en cada frasco, hacemos la división $3 \div 12$, que también podemos expresar como la fracción $\frac{3}{12}$. Es decir, $3 \div 12 = \frac{3}{12}$; en nuestro ejemplo, en cada frasco quedó $\frac{3}{12}$ de kilo de mermelada de fresa. Claro, todavía podemos simplificar esa última fracción, porque $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$, y entonces podemos decir que el contenido de cada frasco fue de $\frac{1}{4}$ de kilo, es decir, la cuarta parte de un kilo (250 gramos).

Hay algunas calculadoras que manejan fracciones, pero a todas les podemos marcar una fracción como una división, y

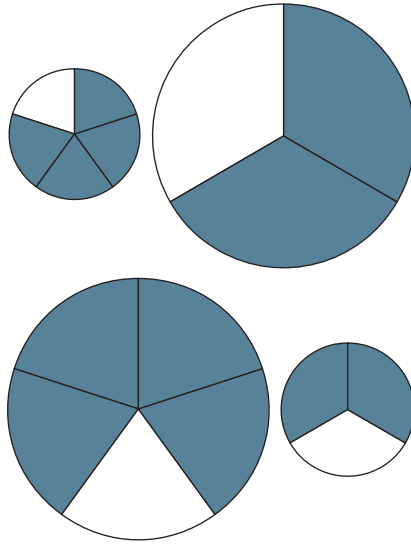
la calculadora da el resultado como un número decimal. Por ejemplo,

$$\frac{1}{2} = 1 \div 2 = 0.5, \quad \frac{4}{3} = 4 \div 3 = 1.333 \dots, \quad \frac{3}{8} = 3 \div 8 = 0.375$$

Verifica estas operaciones con tu calculadora.

➤ **La fracción puede ser considerada como un operador, es decir como algo que indica que se hace una operación.** Esta operación es la partición de una unidad, y por lo tanto es muy importante especificar de qué unidad se está hablando. Es decir, **aquí** hablamos de una fracción **de** una unidad. Veamos un ejemplo:

- Consideremos las fracciones $\frac{4}{5}$ y $\frac{2}{3}$. Si no especificamos lo contrario, estamos dando por sentado que se habla de dos terceras partes y de cuatro quintas partes de la misma unidad. Porque si son $\frac{4}{5}$ de una unidad y $\frac{2}{3}$ de otra, podemos tener muy diversas cantidades. Por ejemplo, ¿quién comió más pastel si Juana se comió $\frac{4}{5}$ de un pastelito y Luisa se comió $\frac{2}{3}$ de un pastelote? ¿Y quién comió más pastel si Juan se comió $\frac{4}{5}$ de un pastelote y Luis se comió $\frac{2}{3}$ de un pastelito?



¿quién recibe más dinero? En el caso de Pedro, un quinto del dinero son veinte mil pesos, y él recibe cuatro veces eso, o sea ochenta mil pesos, mientras que en el caso de Carlota la tercera parte del dinero son 4 millones, y ella recibe dos veces eso, o sea 8 millones de pesos: ¡cien veces más que Pedro!

Eso último lo podemos expresar de la siguiente manera:

$$\frac{4}{5} \text{ de } \$100,000 \text{ son } \$80,000 \text{ y}$$

$$\frac{2}{3} \text{ de } \$12,000,000 \text{ son } \$8,000,000$$

También se puede expresar como una multiplicación (la multiplicación de fracciones se revisará más adelante):

$$\frac{4}{5} \times \$100,000 = \$80,000 \quad \text{y} \quad \frac{2}{3} \times \$12,000,000 = \$8,000,000$$

Esto lo puedes verificar con tu calculadora, considerando que $\frac{4}{5}$ es lo mismo que $4 \div 5$ y que $\frac{2}{3}$ es lo mismo que $2 \div 3$. Entonces las operaciones que debes hacer son:

$$4 \div 5 \times 100000 = \quad \text{y} \quad 2 \div 3 \times 12000000 =$$

Dicho de otra manera, cuando la fracción indica una operación, tenemos:

☞ Si $\frac{a}{b}$ es una fracción y C es una cantidad, la expresión $\frac{a}{b}$ **de** C se calcula como $\frac{a}{b} \times C$

➤ **La fracción como razón.** Además de sus sentidos como número, cociente u operador, la fracción también puede ser considerada como *una razón*, es decir, como la relación entre dos cantidades. Veamos dos ejemplos:

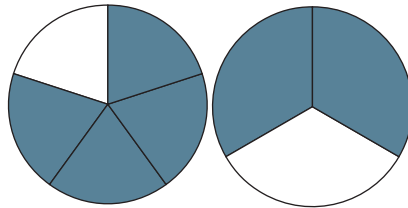
- En un grupo de 60 jóvenes, 8 manifestaron practicar algún deporte. La relación entre estas dos cantidades puede expresarse como $8 : 60 = \frac{8}{60} = \frac{2}{15}$. Es decir, 2 de cada 15 jóvenes manifestaron practicar algún deporte.
- Los jugos de cierta marca se venden en dos presentaciones: botecitos de 200 ml y de 250 ml. La relación entre estas dos cantidades puede expresarse como $200 : 250 = \frac{200}{250} = \frac{4}{5}$. Es decir, por cada 5 botecitos de una presentación (la de 200 ml) se tiene la misma cantidad de jugo que por 4 de la otra (la de 250 ml).

Por otra parte, se verá también que una razón puede ser considerada como una fracción (capítulo 5).

Dependiendo del contexto, las fracciones se pueden utilizar como números, operadores, cocientes o razones.

Orden y recta numérica

No tiene sentido comparar dos fracciones si no se refieren a la misma unidad. Pero cuando sí son fracciones de la misma unidad entonces sí es posible compararlas; por ejemplo, podemos comparar $\frac{4}{5}$ y $\frac{2}{3}$ del mismo pastel, o de la misma cantidad de dinero. En el primer caso, equivale a preguntarnos quién comió más pastel, si Juana, que comió $\frac{4}{5}$ de pastel, o Luis, que comió $\frac{2}{3}$ de un pastel del mismo tamaño.



Podemos saber si una fracción es menor, igual o mayor que otra; para ello se puede convertir las dos a fracciones equivalentes con el

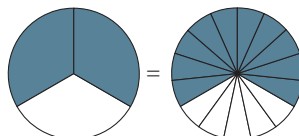
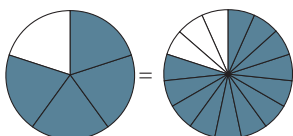
mismo denominador, y después comparar directamente los numeradores. Por ejemplo:

- Para comparar $\frac{4}{5}$ y $\frac{2}{3}$, buscamos convertir ambas a fracciones con un mismo denominador. Es decir, buscamos un número que nos pueda servir como común denominador, y para ello nos puede servir uno que sea múltiplo tanto de 5 como de 3; podemos usar 15, 30, 45, etc., pero el más conveniente es 15 porque es el menor de los múltiplos comunes. Entonces convertimos ambas fracciones a quinceavos:

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \times 3}{5 \times 3} = \frac{12}{15}$$

y

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 5}{3 \times 5} = \frac{10}{15}$$



y como 12 es mayor que 10 (es decir, $12 > 10$), concluimos que

$$\frac{4}{5} > \frac{2}{3}.$$

(Es decir, $\frac{4}{5} = \frac{12}{15} > \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$).

Otra manera de comparar fracciones es, como vimos en el caso de los números enteros, usando la calculadora:

Haz la resta entre las dos fracciones (recuerda que entonces la raya de la fracción se lee como “ $\div$ ”) y observa el signo del resultado. Si este es positivo significa que la primera fracción que tecleaste es la mayor y si es negativo significa que es la menor. Por ejemplo, para comparar las dos fracciones $\frac{4}{5}$ y $\frac{2}{3}$:

$\left(4 \div 5 \right) - \left(2 \div 3 \right)$
 $= 0.133...$

significa que

$\frac{4}{5}$ es la **mayor** de las dos fracciones:

$$\frac{4}{5} > \frac{2}{3}$$

$\left(2 \div 3 \right) - \left(4 \div 5 \right)$
 $= -0.133...$

significa que

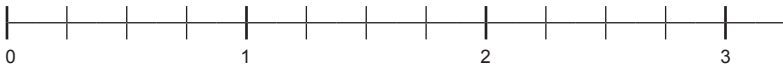
$\frac{2}{3}$ es la **menor** de las dos fracciones:

$$\frac{2}{3} < \frac{4}{5}$$

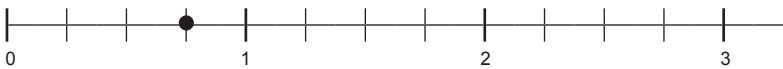
Cuando las fracciones se consideran como números, se pueden colocar en la recta numérica. Para ello se subdivide la unidad según la cantidad de partes indicadas por el denominador y se considera la cantidad de esas porciones a partir del 0. Por ejemplo, veamos cómo quedan las fracciones $\frac{3}{4}$ y $\frac{7}{5}$. Para la primera, si consideramos la recta numérica



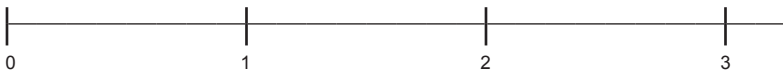
Dividimos cada unidad en cuatro partes



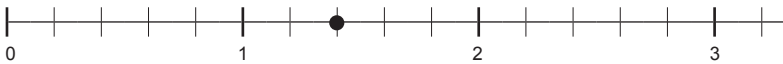
Y, a partir del cero, contamos tres de ellas: el punto que corresponde a $\frac{3}{4}$ se ha señalado con un pequeño círculo



Análogamente, para representar $\frac{7}{5}$ en la recta numérica



Dividimos cada unidad en cinco partes y, a partir del cero, contamos siete de ellas:



1.2.2. Fracciones decimales

Aquí nos ocuparemos de unas fracciones particulares: las que tienen como denominador números como 10, 100, 1000, etc.; es decir, las que tienen como denominador una *potencia* de diez (se dice esto porque $10 = 10^1$, $100 = 10^2$, $1000 = 10^3$, y así sucesivamente). A estas fracciones las llamamos “fracciones decimales”.

Las fracciones decimales se pueden expresar de otra manera. Por ejemplo, la fracción $\frac{403}{100}$ también se representa con el número 4.03.

Es decir,

$$4.03 = \frac{403}{100}$$

En una fracción decimal expresada así:

- la *cantidad de dígitos después del punto* indica la *potencia de diez* que tiene el denominador de la fracción, es decir, la cantidad de ceros que siguen al número 1;
- el *valor numérico* sin el punto decimal indica el numerador.

Por ejemplo:

- En 4.03 hay *dos* dígitos después del punto; decimos que hay dos “cifras decimales” o simplemente dos “decimales”. Eso corresponde al denominador 100: un 1 con *dos* ceros, o sea 10^2 . La unidad se partió en 100 porciones iguales, y de estas consideramos 403.
- En 0.9876 hay cuatro cifras decimales. Esto quiere decir que la unidad se parte en $10^4 = 10,000$ partes iguales, y que de ellas consideramos 9,876.

De esta manera, se expresa:

-  Que la unidad se va a partir, mediante un punto
-  En cuántas partes se parte, mediante la cantidad de dígitos que van después del punto
-  Cuántas de esas partes se consideran, mediante el número representado por todos los dígitos

Los números menores que 1 también se pueden expresar sin el cero inicial. Por ejemplo: $.007 = 0.007$. Verifica esto en tu calculadora: teclea $.007$  y observa el resultado.

En los números decimales, los dígitos a la derecha de las unidades tienen una relación de “diez en diez”, es decir que 1 unidad equivale a 10 décimos, 1 décimo equivale a 10 centésimos, 1 centésimo equivale a 10 milésimos, etc.

El sistema de numeración incluyendo números decimales

El cuadro que se había hecho para explicar el sistema de numeración se puede ahora completar de la siguiente manera, donde no vamos *agrupando* de 10 en 10 (10 unidades se agrupan en 1 decena, 10 decenas en 1 centena, y así sucesivamente), sino que ahora vamos *fraccionando* de 10 en 10: una unidad se fracciona en 10 décimos, 1 décimo se fracciona en 10 centésimos, y así sucesivamente.

unidades	décimos	centésimos	milésimos	diezmilésimos	cienmilésimos	millonésimos	Etcétera...
Una unidad = 10 décimos							
Una unidad = 100 centésimos	Un décimo = 10 centésimos						
Una unidad = 1,000 milésimos	Un décimo = 100 milésimos	Un centésimo = 10 milésimos					
Una unidad = 10,000 diezmilésimos	Un décimo = 1,000 diezmilésimos	Un centésimo = 100 diezmilésimos	Un milésimo = 10 diezmilésimos				
Una unidad = 100,000 cienmilésimos	Un décimo = 10,000 cienmilésimos	Un centésimo = 1,000 cienmilésimos	Un milésimo = 100 cienmilésimos	Un diezmilésimo = 10 cienmilésimos			
Una unidad = 1,000,000 millonésimos	Un décimo = 100,000 millonésimos	Un centésimo = 10,000 millonésimos	Un milésimo = 1,000 millonésimos	Un diezmilésimo = 100 millonésimos	Un cienmilésimo = 10 millonésimos		

Podemos también poner juntos los comienzos de ambos cuadros:

millares	centenas	decenas	unidades	décimos	centésimos	milésimos	Etcétera
Un millar = 1,000 unidades	Una centena = 100 unidades	Una de- cena = 10 unidades	Una unidad = 10 décimos				
Un millar = 100 decenas	Una cen- tena = 10 decenas		Una unidad = 100 centésimos	Un décimo = 10 centésimos			
Un millar = 10 centenas			Una unidad = 1,000 milésimos	Un décimo = 100 milésimos	Un centé- simo = 10 milésimos		
			Una unidad = 10,000 diezmilé- simos	Un décimo = 1,000 diezmilésimos	Un centé- simo = 100 diez- milésimos	Un milé- simo = 10 diezmilé- simos	

Observa que así como 10 unidades se agrupan en 1 decena, 10 decenas se agrupan en 1 centena, etc., también se puede decir que una centena se fracciona (o se desagrupa) en 10 decenas y una decena se fracciona (o se desagrupa) en 10 unidades. De manera similar, se podría decir que 10 milésimos se agrupan en 1 centésimo, 10 centésimos se agrupan en un décimo y 10 décimos se agrupan en 1 unidad.

Fracciones decimales equivalentes

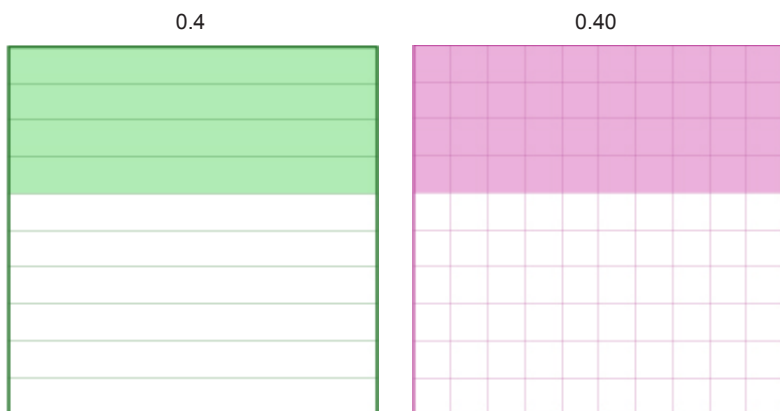
Consideremos los siguientes ejemplos:

$$0.4 = \frac{4}{10} \quad 0.40 = \frac{40}{100} \quad 0.400 = \frac{400}{1000} \quad 0.04 = \frac{4}{100} \quad 0.004 = \frac{4}{1000}$$

¿Todos estos números son distintos? ¿Todos son iguales? Veamos.

A continuación se da una representación gráfica de los dos primeros números del renglón de arriba. Como unidad se toma un

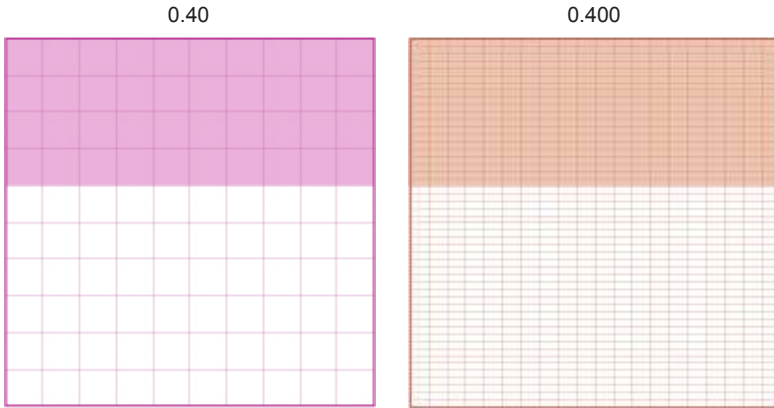
cuadrado. Para representar 0.4 (4 décimos) partimos la unidad en diez partes iguales (diez franjas horizontales), y para representar 0.40 (40 centésimos) partimos la unidad en cien partes iguales (cien cuadros). Después iluminamos lo que consideramos: 4 de las franjas en el primer caso y 40 de los cuadros en el segundo:



Como se puede ver, el área marcada en ambos casos es la misma. Tenemos entonces varias maneras de decir esto:

- Tanto 0.4 como 0.40 se refieren a la misma parte de la unidad
- 4 décimos es lo mismo que 40 centésimos
- $0.4 = 0.40$
- 0.4 y 0.40 son otra manera de representar las fracciones equivalentes $\frac{4}{10}$ y $\frac{40}{100}$.

Lo mismo podría decirse si partimos en diez cuadritos cada uno de los cuadros del segundo cuadrado, con lo que tendríamos milésimos: si consideramos 400 de ellos (400 milésimos), tendríamos la misma área:



O sea que

$$0.4 = 0.40 = 0.400$$

Y así podríamos seguir indefinidamente:

$$0.4 = 0.40 = 0.400 = 0.4000 = 0.40000 = 0.400000 = 0.4000000 = 0.40000000 = 0.400000000 = 0.4000000000 \dots$$

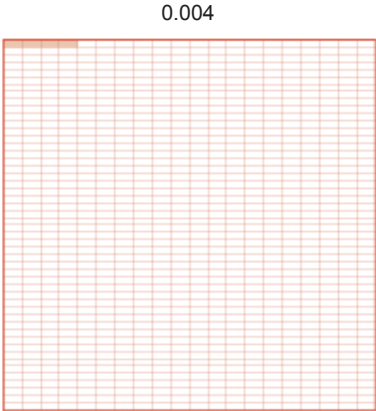
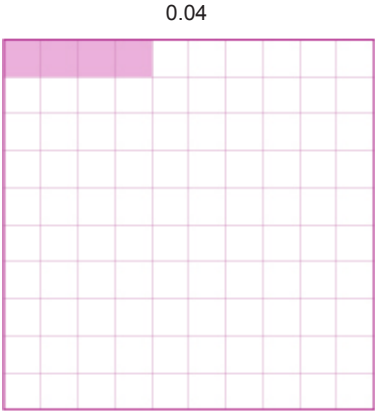
Es decir, cuando estamos hablando de cifras *a la derecha* del punto decimal, podemos agregar *a la derecha del último dígito distinto de cero* todos los ceros que queramos, el número siempre será el mismo.

De la misma manera, si estamos hablando de cifras *a la izquierda* del punto decimal, podemos agregar *a la izquierda del primer dígito distinto de cero* todos los ceros que queramos, el número siempre será el mismo:

$$4 = 04 = 004 = 0004 = 00004 = 000004 = 0000004 = 00000004 = 000000004 = 0000000004 = 00000000004 = \dots$$

Sin embargo, no es lo mismo agregar ceros a la izquierda si estamos hablando de números decimales. Por ejemplo: observa en los siguientes tres cuadros, la representación de 4 décimos (0.4), 4 centésimos (0.04) y 4 milésimos (0.004).

¡ 0.4 no es igual a 0.04 ni a 0.004 !



Conversión de otras fracciones a números decimales

Como hemos visto, las fracciones cuyo denominador es una potencia de 10, a las que llamamos fracciones decimales, se pueden expresar como números decimales. También otras fracciones comunes se pueden expresar como números decimales; para ello, es posible interpretar una fracción $\frac{a}{b}$ como la división de a entre b . Ejemplos:

$$\frac{2}{5} = 2 \div 5 = 0.4 \qquad -\frac{1}{8} = -1 \div 8 = -0.125 \qquad \frac{7}{4} = 7 \div 4 = 1.75$$

Verifica estos resultados con la calculadora. (Recuerda que cuando el signo $-$ se refiere a una operación, se usa la tecla $-$ que está a la derecha de los números, pero cuando se refiere a un número negativo se usa la tecla $(-)$ que en las calculadoras tipo Casio está a la izquierda).

Una de las implicaciones de lo aquí visto es que las operaciones con fracciones se pueden realizar con la calculadora, convirtiendo cada fracción a un número decimal.

Cuando se convierte una fracción cualquiera en un número decimal, siempre se obtiene un decimal con un número finito de cifras decimales o con un número infinito de ellas, pero que se repiten en ciclos o periodos. Por ejemplo:

$$\begin{array}{lll} \frac{21}{50} = 0.42 & \frac{186}{66} = 2.8181818\ldots & -\frac{5}{130} = -0.0384615384615\ldots \\ \frac{1}{3} = 0.33333\ldots & -\frac{8}{3} = -2.66666\ldots & \frac{7}{900} = 0.0077777\ldots \end{array}$$

Como queda claro en los últimos ejemplos, esos ciclos o periodos pueden ser de una sola cifra: por ejemplo, una lista infinita de treses, seises o setes. Podemos también decir, por ejemplo, que $\frac{1}{3}$ es igual a cero punto tres periódico.

Números decimales con nueve periódico

Una clase muy especial de números decimales son los que tienen una lista infinita de nueves (o nueve periódico), como en los siguientes casos:

$$0.9999\ldots \quad -4.29999\ldots \quad 0.000169999\ldots$$

Cuando esto ocurre, el número es igual al que resulta de sumarle 1 a la cifra anterior al primer 9 de la serie y quitar todos los nueves. Por ejemplo:

$$0.9999\ldots = 1 \quad -4.29999\ldots = -4.3 \quad 0.000169999\ldots = 0.00017$$

Decimales con nueve periódico

Cuando un número decimal tiene una lista infinita de nueves, es igual al número que resulta de sumarle 1 a la cifra anterior al primer 9 de la serie y quitar todos los nueves. Si te preguntas a qué se debe esto, observa qué ocurre, por ejemplo, con el número 0.999999...

Sabemos que $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$, y también sabemos que $\frac{1}{3} = 0.33333\dots$. Si sustituimos este último resultado en $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$, tenemos que

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0.33333\dots + 0.33333\dots + 0.33333\dots,$$

es decir

$$\begin{array}{r} 0.33333\dots \\ 0.33333\dots \\ + 0.33333\dots \\ \hline 0.99999\dots \end{array}$$

Entonces, $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ es igual a 1 y también es igual a 0.99999... Por lo tanto, esos dos números son iguales: $0.99999\dots = 1$.

Orden

Muy frecuentemente es necesario comparar números decimales. Para ver cómo es esto, hablaremos de varios casos: primero, la comparación de dos números decimales positivos; luego la de dos negativos, y por último, veremos cómo comparar números decimales positivos, negativos y cero. Terminaremos viendo cómo usar la calculadora para comparar números decimales.

En toda la presentación que sigue, *excluiremos números con nueve periódico* como los que acabamos de mencionar. Por ejemplo, si tenemos que comparar 3.253 con 3.240999999..., consideraremos que el número con el que vamos a comparar 3.253 es 3.241.

➤ *Comparación de dos números decimales positivos*

Para saber si un número decimal positivo es menor, igual o mayor que otro, comparamos primero la parte entera (es decir, la que está a la izquierda del punto decimal). Si una de ellas es mayor que la del otro, es la del número más grande. Así:

$$13.25 > 7.8962 \text{ porque } 13 > 7 \quad 5.62 < 18.1 \text{ porque } 5 < 18$$

Pero si las partes enteras son iguales,

como en	1.3	y	1.045,
o como en	72.12968	y	72.123,
o como en	3.2	y	3.20

se puede seguir cualquiera de los siguientes dos métodos, que llevan al mismo resultado:

a) Se comparan unidades con unidades, décimos con décimos, centésimos con centésimos, etc., hasta que haya una diferencia, y esa diferencia es la que marca cuál de los dos números es mayor. Ejemplos:

- Para comparar 1.3 y 1.045, comparamos unidades con unidades ($1=1$), décimos con décimos ($3>0$), y concluimos que $1.3 > 1.045$
- Para comparar 72.12968 y 72.123, comparamos unidades con unidades ($72=72$), décimos con décimos ($1=1$), centésimos con centésimos ($2=2$), milésimos con milésimos ($9>3$) y concluimos que $72.12968 > 72.123$
- Para comparar 3.2 y 3.20, comparamos unidades con unidades ($3=3$), décimos con décimos ($2=2$) y centésimos con centésimos ($0=0$); es decir, ninguno de los dos números tiene centésimos aunque en el primero no esté explícitamente el 0. Concluimos que $3.2 = 3.20$

b) Si los números a comparar tienen una cantidad finita de cifras distintas de 0, se iguala la cantidad de cifras decimales de ambos números agregando ceros a la derecha del que tenga menos (puesto que ya sabemos que agregar ceros a la derecha no cambia al número), y luego se comparan. Ejemplos:

- Para comparar 1.3 y 1.045, igualamos a tres cifras el primero: $1.3 = 1.300$, y luego comparamos las partes decimales .300 y .045, y como 300 milésimos son más que 045 milésimos, concluimos que $1.3 > 1.045$
- Para comparar 72.12968 y 72.123, igualamos a cinco cifras el segundo, $72.123 = 72.12300$, y luego comparamos las partes decimales .12968 y .12300, y como 12,968 cienmilésimos es mayor que 12,300 cienmilésimos, concluimos que $72.12968 > 72.123$
- Para comparar 3.2 y 3.20, igualamos a dos cifras el primero, $3.2 = 3.20$, y luego comparamos las partes decimales .20 y .20, y como ambos son 20 centésimos, concluimos que $3.2 = 3.20$

Una observación:

Hay dos ideas frecuentes e incorrectas sobre cómo ordenar números decimales. Una es que “mientras *más* cifras decimales tenga un número, es *mayor*”; esta idea es incorrecta porque, por ejemplo, 1.045 tiene *más* cifras decimales que 1.3, pero 1.045 es *menor* que 1.3. La otra es que “mientras *menos* cifras decimales tenga un número, es *mayor*”; esta idea también es incorrecta porque por ejemplo 72.123 tiene *menos* cifras decimales que 72.12968, pero 72.123 es *menor* que 72.12968. También vimos dos números *iguales* con distinta cantidad de cifras decimales: 3.2 y 3.20. Dicho de otra manera, *la cantidad de cifras decimales de dos números no determina cuál de los dos es mayor y cuál es menor.*

➤ Comparación de dos números decimales **negativos**

Es importante que recuerdes que cuando los números a comparar son negativos ocurre el “efecto espejo”. Por ejemplo:

- $-3.56137 \text{ ? } -3.564$

Comparamos la parte entera ($3 = 3$), los décimos ($5 = 5$), los centésimos ($6 = 6$), los milésimos ($1 < 4$). Entonces, si los dos

números fueran positivos, tendríamos que $3.56137 < 3.564$. Como son negativos, por el “efecto espejo” tenemos que $-3.56137 > -3.564$

- $-5.97873 ? -5.9283$

Comparamos la parte entera ($5 = 5$), los décimos ($9 = 9$), los centésimos ($7 > 2$). Entonces, si los dos números fueran positivos, tendríamos que $5.97873 > 5.9283$. Como son negativos, por el “efecto espejo” tenemos que $-5.97873 < -5.9283$

- $-0.5 ? -0.05$

Comparamos la parte entera ($0 = 0$), los décimos ($5 > 0$). Entonces, si los dos números fueran positivos, tendríamos que $0.5 > 0.05$. Como son negativos, por el “efecto espejo” tenemos que $-0.5 < -0.05$

➤ *Comparación de números decimales **negativos, positivos y cero***

Recuerda que cualquier número negativo es menor que cero y cualquier número positivo es mayor que cero. Por ejemplo:

- $-1.5 < 0$
- $0.00051 > 0$

Asimismo, es importante que recuerdes que cuando se comparan un número negativo y uno positivo, el negativo siempre es menor que el positivo. Por ejemplo:

- $-2.63 < 0.02$

Vale la pena observar que en los últimos ejemplos hemos hecho las comparaciones con el método *a)*, pero también las podríamos hacer con el método *b)*. Por ejemplo:

- Para comparar -3.56137 y -3.564 , igualamos a cinco cifras decimales el segundo, y comparamos 3.56137 y 3.56400 ; como $56,137$ cienmilésimos son menos que $56,400$ cienmilésimos,

concluimos que $3.56137 < 3.56400$ y, por el “efecto espejo”,
que $-3.56137 > -3.564$

➤ Comparación de números decimales con la calculadora

Hay otro método para comparar dos números decimales: utilizando la calculadora de una manera similar a la que vimos en el caso de los números enteros:

Haz la resta entre los dos números y observa el resultado. Si este es positivo significa que el primer número que tecleaste es el mayor, si es negativo significa que es el menor, y si es cero significa que los dos son iguales. Por ejemplo:

72.12268  72.123  -0.00032

significa que
72.12268 es el **menor** de los dos
números:
72.12268 < 72.123

3.2  3.20  0

significa que
los dos números son **iguales**:
3.2 = 3.20

(-) 3.56137  ((-) 3.564)  0.00263

significa que
-3.56137 es el **mayor** de los dos números:
-3.56137 > -3.564

(-) 2.63  0.02  -2.65

significa que
-2.63 es el **menor** de los dos
números:
-2.63 < 0.02

Nota: Si el primer resultado tiene una forma “extraña” en tu calculadora es porque -0.00032 es un número muy pequeño. Para obtener el resultado como lo damos aquí, pulsa, en una calculadora tipo Casio, varias veces la tecla  hasta que aparezca la opción **MODE**, elígela y luego pulsa el 2. Esto será explicado más adelante, en el capítulo 2.

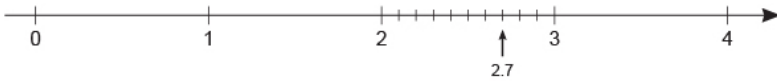
Recta numérica

Los números decimales positivos se pueden ubicar en la recta numérica de manera similar a como se ubican los números naturales. Para ello se consideran sucesivamente el valor de las unidades, los décimos, los centésimos, etc. En una recta numérica se marca el cero y también se indica cuál es la unidad. Por ejemplo, ubiquemos en la recta numérica el número **2.74**

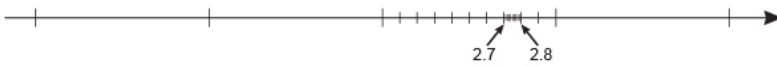
Empezamos ubicando el 2 en las unidades de la recta:



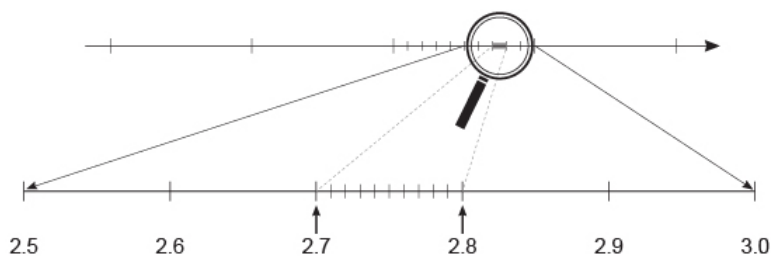
Después partimos en diez porciones (es decir, diez décimos) la unidad entre el 2 y el 3, y ubicamos ahí el 7; se obtiene el punto correspondiente a 2.7



A continuación partimos en diez porciones (es decir, diez centésimos) el décimo entre 2.7 y 2.8, con el fin de ubicar dónde queda el 4.



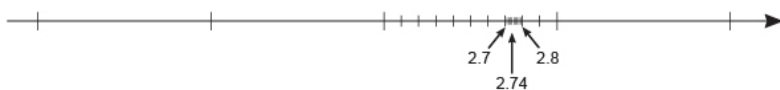
Ahora las diez divisiones, es decir los centésimos, quedaron muy cerca unos de otros y ya es difícil ubicar el 4 que buscamos. Imaginemos entonces que ponemos una lupa sobre la recta para ver con mayor detalle lo pequeño:



La lupa ya nos permite ubicar el cuarto centésimo; con ello tenemos ahora ubicado el número 2.74:

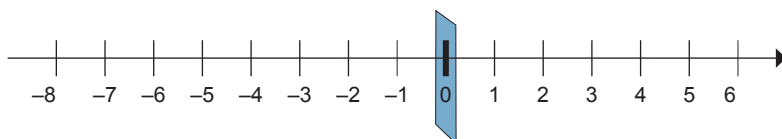


Si regresamos a la escala original (sin la lupa), la representación se ve así:

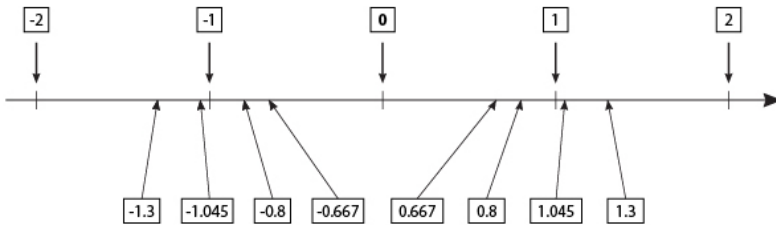


Este proceso lo podríamos seguir indefinidamente, partiendo cada vez en diez y ubicando la siguiente cifra. Claro, cada vez que partimos en diez las porciones se vuelven más y más chicas, y necesitaríamos lupas cada vez más poderosas.

Cuando se tienen números decimales positivos y negativos podemos imaginar la recta con un espejo, como lo habíamos hecho con los enteros:



Y entonces podemos ubicar sobre la recta los números. He aquí algunos números entre -2 y 2 :

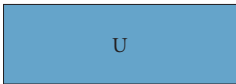


En la práctica la precisión con la que colocamos los puntos en la recta está sujeta a muchas condicionantes: el tamaño de la unidad de referencia, la cantidad de cifras decimales que tiene el número, el grosor del lápiz y de la propia recta, entre otras. Es por ello que la recta se convierte, en la práctica, en una herramienta que permite una gran visualización y la percepción gráfica de las relaciones de orden entre diversos números, pero no se puede pretender que tenga mucha precisión.

EJERCICIOS

Recuerda que los ejercicios con numeración par son similares a los que los preceden. Haz solamente aquellos que consideres necesarios para tu proceso de aprendizaje.

1.07. En cada uno de los siguientes incisos considera la unidad U que se indica y representa gráficamente la fracción dada:

- | | | | |
|-------------------|---|-------------------|---|
| a) $\frac{7}{15}$ |  | c) $\frac{7}{3}$ |  |
| b) $\frac{3}{8}$ |  | d) $\frac{17}{4}$ |  |

1.08. En cada uno de los siguientes incisos considera la unidad U que se indica y representa gráficamente la fracción dada:

- a) $1\frac{3}{4}$  c) $\frac{1}{6}$ 
- b) $\frac{3}{12}$  d) $\frac{17}{17}$ 

1.09. En cada uno de los siguientes incisos considera la colección como una unidad e indica gráficamente la fracción dada:

- a) $\frac{3}{8}$  c) $\frac{5}{4}$ 
- b) $\frac{8}{7}$  d) $\frac{2}{3}$ 

1.10. En cada uno de los siguientes incisos considera la colección como una unidad e indica gráficamente la fracción dada:

- a) $\frac{2}{3}$  c) $\frac{3}{5}$ 
- b) $\frac{1}{17}$  d) $\frac{5}{3}$ 

1.11. En cada uno de los siguientes incisos indica cuáles fracciones son equivalentes a la primera:

- a) $\frac{4}{11}, \frac{8}{22}, \frac{14}{33}, \frac{22}{60}, \frac{36}{99}$ c) $\frac{13}{17}, \frac{39}{51}, \frac{81}{170}, \frac{65}{68}, \frac{78}{102}$
- b) $\frac{7}{4}, \frac{4}{7}, \frac{14}{12}, \frac{189}{108}, \frac{105}{60}, \frac{58}{34}$ d) $\frac{6}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{3}{6}, 2, \frac{500}{250}$

1.12. En cada uno de los siguientes incisos indica cuáles fracciones son equivalentes a la primera:

a) $\frac{15}{6}, \frac{5}{2}, \frac{75}{30}, \frac{45}{12}, \frac{35}{30}$

c) $\frac{79}{100}, \frac{79}{50}, \frac{7}{10}, \frac{100}{79}, \frac{79}{200}$

b) $\frac{18}{24}, \frac{6}{8}, \frac{36}{48}, \frac{48}{72}, \frac{25}{31}$

d) $\frac{90}{360}, \frac{9}{36}, \frac{1}{4}, \frac{25}{100}, \frac{27}{108}$

1.13. Compara las siguientes parejas de fracciones y coloca entre ellas el símbolo $<$, $>$ o $=$ según corresponda:

a) $\frac{4}{5}$ y $\frac{16}{25}$

c) $\frac{13}{17}$ y $\frac{23}{27}$

b) $\frac{6}{8}$ y $\frac{9}{12}$

d) $\frac{6}{11}$ y $\frac{25}{50}$

1.14. Compara las siguientes parejas de fracciones y coloca entre ellas el símbolo $<$, $>$ o $=$ según corresponda:

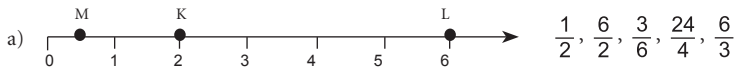
a) $\frac{2}{3}$ y $\frac{79}{179}$

c) $\frac{3}{12}$ y $\frac{5}{20}$

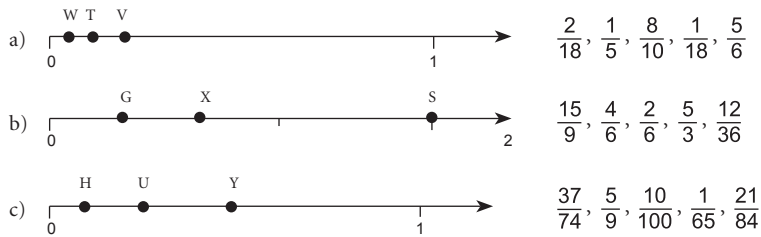
b) $\frac{2}{3}$ y $\frac{23}{29}$

d) $\frac{14}{7}$ y $\frac{7}{14}$

1.15. En cada inciso se dan una recta numérica con letras y algunas fracciones. Indica a cuál o cuáles de esas fracciones corresponde cada letra:



1.16. En cada inciso se dan una recta numérica con letras y algunas fracciones. Indica a cuál o cuáles de esas fracciones corresponde cada letra:



1.17. Convierte cada una de las siguientes fracciones a un número decimal con cuatro cifras decimales:

- a) $\frac{17}{250}$ b) $\frac{18}{4}$ c) $\frac{5}{80}$ d) $\frac{9}{6}$

1.18. Convierte cada una de las siguientes fracciones a un número decimal con seis cifras decimales:

- a) $\frac{13}{4}$ b) $\frac{4}{1600}$ c) $\frac{25}{800}$ d) $\frac{800}{25}$

1.19. Completa la siguiente tabla como se ejemplifica en el primer renglón. En los números que tienen la misma parte entera, analiza cuántos décimos, centésimos, milésimos y diezmilésimos tiene cada número y observa en cuáles números coinciden el llenado de las filas, lo que significa que esos números son iguales:

	Número	Decenas de millar	Unidades de millar	Centenas	Decenas	Unidades	Décimos	Centésimos	Milésimos	Diezmilésimos
a)	893.04	0	0	8	9	3	0	4	0	0
b)	18349.1538									
c)	6.0008									
d)	6.008									
e)	6.08									
f)	6.8									

continúa

	Número	Decenas de millar	Unidades de millar	Centenas	Decenas	Unidades	Décimos	Centésimos	Milésimos	Diezmilésimos
g)	6.8000									
h)	10.50									
i)	10.5									
j)	10.500									
k)	10.05									
l)	10.050									

1.20. Completa la siguiente tabla como se ejemplifica en el primer renglón. En los números que tienen la misma parte entera, analiza cuántos décimos, centésimos, milésimos y diezmilésimos tiene cada número y observa en cuáles números coinciden el llenado de las filas, lo que significa que esos números son iguales:

	Número	Decenas de millar	Unidades de millar	Centenas	Decenas	Unidades	Décimos	Centésimos	Milésimos	Diezmilésimos
a)	893.04	0	0	8	9	3	0	4	0	0
b)	12.0500									
c)	0.0003									
d)	0.003									
e)	0.03									
f)	0.0030									
g)	0.030									
h)	0.0300									
i)	0.3									
j)	10,085.406									
k)	10,805.0460									
l)	10,850.406									
m)	18,005.0046									
n)	10,085.4600									
o)	10,085.4060									

1.21. En cada uno de los siguientes incisos indica cuáles números decimales son iguales al primero (aquí los puntos suspensivos indican que la última cifra se repite indefinidamente):

- a) 4.506, 4.056, 4.5060, 4.0506, 0.4506, 45.06, 4.0506, 4.56
- b) -0.048, 0.048, -0.048000, 0.48, -0.48, 0.04800000, -0.00048
- c) 10.1, -10.1, 10.01, 10.001, 10.1000, -10.10, 10.10, 10.101
- d) 2.5, 2.599999..., 2.999999..., 2.49999..., 2.555555...

1.22. En cada uno de los siguientes incisos indica cuáles números decimales son iguales al primero (aquí los puntos suspensivos indican que la última cifra se repite indefinidamente):

- a) -0.5, 0.05, -0.5005, -0.050, 0.0500, -0.500, -0.50, 0.5
- b) 456.7899999..., 456.7999999..., 456.79, 456.99999..., 456.7899999999...
- c) 0.0026, 0.0206, 0.2060, 0.00026, 0.2600, 0.0260, 0.00260
- d) 99999, 0.99999..., 1, 0.1, 0.9, 10000, 100000
- e) -5706.5030, -5706.53, -576.53, -5706.503, -5706.5003, -5706.0503
- f) 0.003, 0.030, 0.300, 0.3, 0.003000, 0.03000, 0.30303...
- g) -7.0803, -07.00803, -7.8030, -7.83, -70.803, -7.008030000, -7.083

1.23. Ordena de menor a mayor los números decimales de cada inciso, colocando los símbolos $<$ o $=$ según corresponda:

- a) 12.5, 12.50, 12.05, 12.005, 12.500
- b) -1.7, 1.07, -1.71, 1.071, -1.701
- c) 10.2, -12.22, -10.222, 12.02, -10.22200, 12.022, 10.02
- d) 5.345, 5.0345, 5.034, 5.000345, 5.3045, 5.03045
- e) 54.8, -45.6, 50.01, -40.9, -49.8, 50.1, -40.01

1.24. Ordena de menor a mayor los números decimales de cada inciso, colocando los símbolos $<$ o $=$ según corresponda:

- a) 0.06, 1.54, -0.8, -1.3, 5.004, 5.4, 5.40
- b) -1.64, -1.96, -2, -1, 1.86, 2.3, 1.96
- c) 1.0085, 1.0850, 1.805, 1.085, 1.0805, 1.850, 1.08050
- d) 3, -4, 7, -11, 15, -19, 23, -27
- e) 0.875, 0.7456, 0.09, 0.097, 0.7843, 0.89
- f) -1.75, -0.62, 0.1789, -0.078, -0.687, -1.749
- g) -178.17, -170.45, -175.80, -175.79, -171.10, -171.9
- h) 0.10, 0.9, 0.11, 0.001, 0.09, 0.91
- i) -1.1, -1.23, -2.34, -2.345, -3.45, -3.456
- j) -31.25, 47.42, -18.72, 47.415, 10.567, 10.56, 18.7
- k) -500.087, -508.70, -580.7, -580.07, -500.87
- l) -0.1008, -0.018, -0.18, -0.108, -0.180, -0.188, -0.1080
- m) 0.045, 0.450, 0.0405, 0.405, 0.4005, 0.0045
- n) -0.099, -0.11, -0.09, -0.01, -0.101, -0.909, -0.011
- o) -4.05, -5.04, -5.4, -4.50, -5.45, -4.54, -5.05
- p) 10780.3049, 10870.3004, 10087.30094, 10807.3490, 10078.3940
- q) -20600.5, -26000.05, -20060.500, -20600.05, -20006.005, -20060.05
- r) 0.545, 0.054, 0.0504, 0.450, 0.0054, 0.540, 0.4050
- s) -23.1, -23.101, -24.001, -24.01, -23.11, -22.10, -22.01
- t) 3456780, 3048675, 3045867, 3408765, 3045678, 3405678

1.25. Representa en una recta numérica los números que se indican:

- a) 0.1, 0.35, 0.2, 0.25, 0.05
- b) -1.75, 1.2, -0.5, 1, 0.25
- c) -0.18, 0.08, -0.28, 0.58, -0.88, 0.48
- d) -30.56, -30.67, -30.88, -30.84, -30.72, -30.04, -30.16
- e) -210, -120, -200, -140, -100, -125, -180
- f) 0.004, 0.0038, 0.002, 0.0015, .0050, 0.001

1.26. Representa en una recta numérica los números que se indican:

- a) 15.4, 18.2, 16, 17.3
- b) 10.5, 10.65, 10.80, 10.45, 10.2
- c) 60.8, 61.3, 62.5, 59.8, 62.7, 61.6, 62.2
- d) -20.4, -21.8, -22.3, -19.5, -21.5, -22.6, -20.9
- e) 100.75, 101.25, 99.75, 101.5, 102.25, 99
- f) 1.12, 1.02, 1.22, 1.20, 1.01, 1.42, 1.04, 1.44, 1.24
- g) 0.75, .705, .075, 0.50, .1, .17
- h) -8.7, -7.5, -6.4, -9.6, -5.3, -3.1, -4.6
- i) 0.8, -1.5, -0.3, 0.1, 0.4, -0.7, -1.1
- j) -0.15, -0.25, -0.05, -0.75, -0.1, -0.5
- k) 0.405, 0.280, 0.34, 0.5, 0.100, 0.08
- l) -1.2, -2.3, -3.4, -4.5, -5.6, -6.7, -7.8, -8.9

1.3. NÚMEROS REALES

En esta última sección del capítulo concerniente a los números, veremos brevemente cómo son los números con los que se realiza la mayor parte de las mediciones y los cálculos en ciencia y en la vida cotidiana: los números reales.

En general, los números reales se expresan como decimales. Estos pueden ser de la forma de los números decimales que ya hemos visto, como

0.5, -2.333..., 58.6201, -0.1, 3, 52.171717..., etc.

pero también pueden tener una cantidad infinita de cifras decimales no periódicas. Algunos ejemplos conocidos son:

$\pi=3.14159265358979323846\dots$, $\sqrt{2}=1.41421356237309504880\dots$

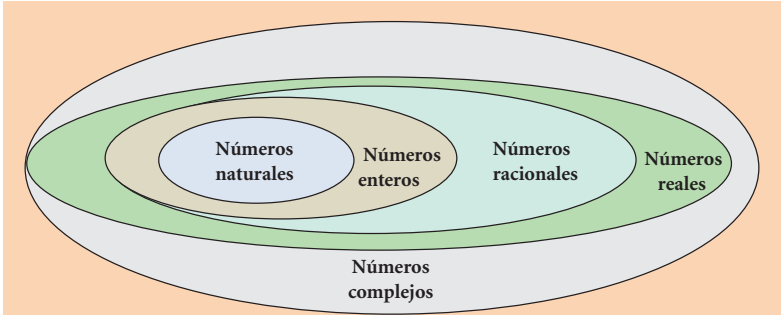
1.01001000100001000001000000100000001...

Los números reales tienen muchas propiedades matemáticas y entre ellas vale la pena mencionar que:

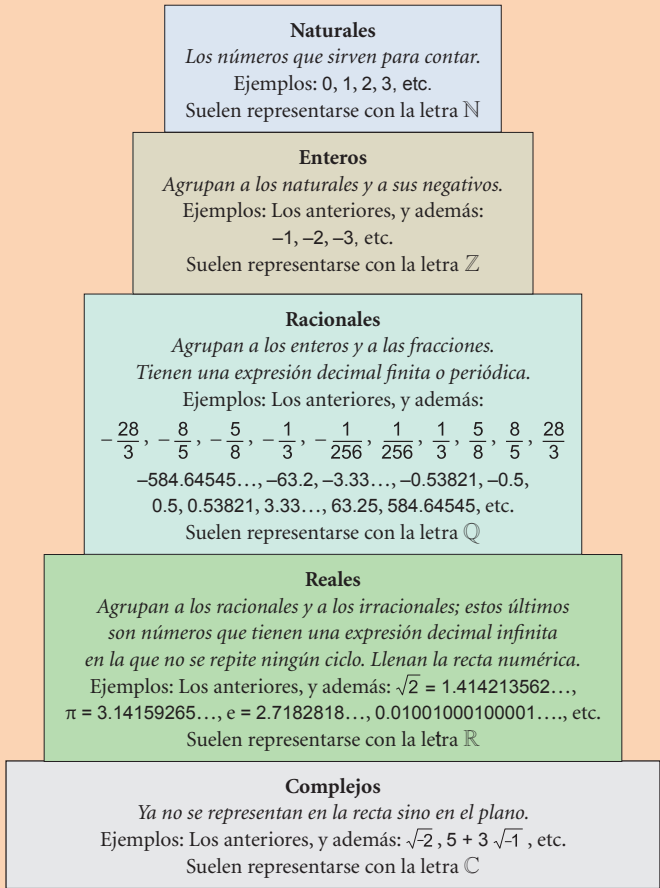
- Los números reales “lleenan” toda la recta numérica: cualquier número real corresponda a un punto de la recta y viceversa, cualquier punto de la recta corresponde a un número real.

1.3.1. Los números reales como conjunto de números

Muy probablemente en algún momento de tu formación académica te mencionaron los distintos conjuntos de números: naturales, enteros, racionales, reales, etc.



Cada uno de estos conjuntos está incluido dentro de otro y se caracterizan por lo siguiente:



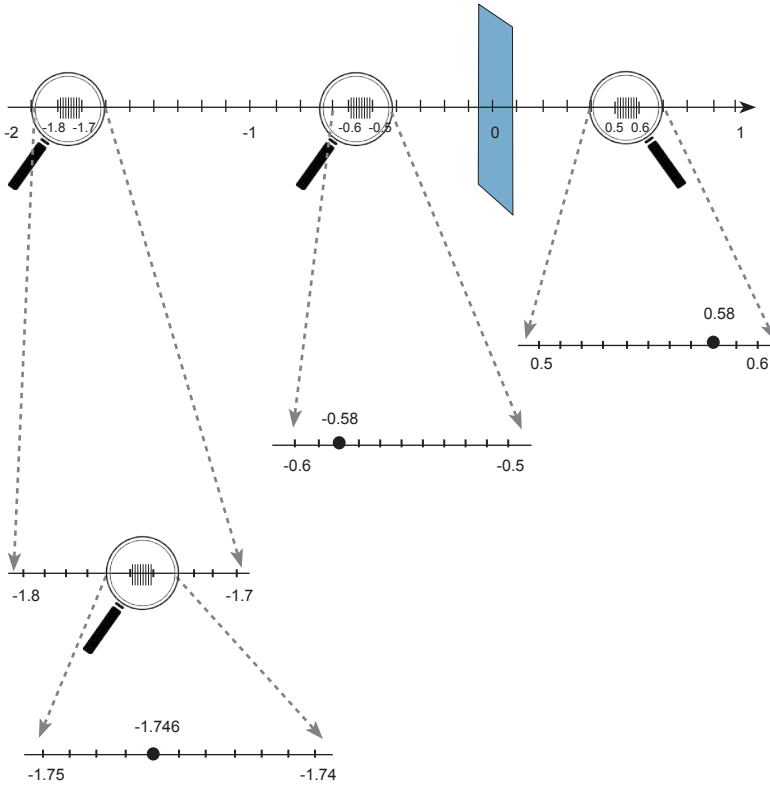
1.3.2. Orden de los números reales y recta numérica

Cuando se trabaja con números reales se aplican las mismas reglas para ordenar que se vieron al considerar los naturales, los enteros negativos y los racionales. Por esa razón lo que presentamos en seguida es un resumen de todo ello:

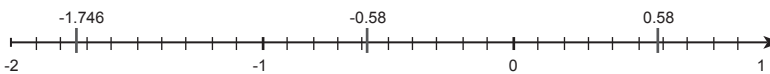
- No se comparan números con nueve periódico (es decir, los que tienen series infinitas de nueves decimales, como $5.2399999\dots$) sino sus equivalentes (es decir, los números que resultan de sumarle 1 a la cifra anterior al primer 9 de la serie, como 5.24), como se vio en las páginas 59 y 60.
- Cualquier número positivo es mayor que cualquier número negativo.
- El cero es menor que cualquier número positivo y mayor que cualquier número negativo.
- Para comparar dos números positivos, se compara primero la parte entera; si una de ellas es mayor que la otra, ese es el número más grande. Si las dos partes enteras son iguales, se comparan décimos con décimos, centésimos con centésimos, y así sucesivamente hasta que haya una diferencia, y esa diferencia es la que marca cuál de los dos números es mayor.
- Para comparar dos números negativos, se procede como si fueran positivos y el resultado final se invierte debido al “efecto espejo”.
- También puedes utilizar la calculadora para hacer la resta entre los dos números y observar el resultado: si este es positivo significa que el primer número que tecleaste es el mayor; si es negativo significa que es el menor, y si es cero significa que los dos son iguales. Por ejemplo:

- como $-2.1 - 0.483 = -2.583$, concluimos que $-2.1 < 0.483$
- como $0.483 - (-2.1) = 2.583$, concluimos que $0.483 > -2.1$
- como $1.572 - 1.53 = 0.042$, concluimos que $1.572 > 1.53$
- como $1.53 - 1.572 = -0.042$, concluimos que $1.53 < 1.572$
- como $(-1.572) - (-1.53) = -0.042$, concluimos que $-1.572 < -1.53$
- como $(-1.53) - (-1.572) = 0.042$, concluimos que $-1.53 > -1.572$
- como $1.570 - 1.57 = 0$, concluimos que $1.570 = 1.57$
- como $(-1.57) - (-1.570) = 0$, concluimos que $-1.57 = -1.570$

En la recta numérica es donde más claramente se puede apreciar el “efecto espejo”, que vimos por primera vez con los números enteros (página 34). Pero además, con muchos números decimales, nos conviene también recurrir a la otra ayuda visual que hemos utilizado: la lupa (página 66). Veamos entonces cómo recurrir a ambas ayudas para ubicar en la recta numérica, por ejemplo, los números 0.58, -0.58 y -1.746:



Y los tres números se representan así en la recta numérica:



1.3.3. Desigualdades e intervalos de números reales

En las páginas 24 a 26, vimos que entre los números naturales una expresión como $x > 4$ quiere decir que x es un número natural que puede tomar los valores 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13... Es decir, todos los números del conjunto formado por 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13... satisfacen la relación $x > 4$. En este apartado veremos dos formas para

expresar conjuntos de números reales que satisfacen relaciones de orden con uno o dos números dados: desigualdades e intervalos.

Como estaremos hablando de orden, podrías querer revisar el resumen que se hizo al respecto en las páginas 60 a 64.

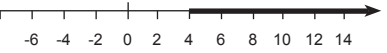
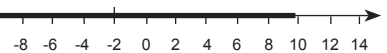
Desigualdades

En la siguiente tabla ampliaremos el ejemplo $x > 4$ con el que habíamos trabajado en las páginas 24 a 26, y veremos qué conjuntos de números satisfacen las diversas expresiones de igualdad o desigualdad, resaltando las similitudes y las diferencias que tienen estas desigualdades cuando se trata de números naturales y cuando se trata de números reales.

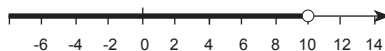
Si sabemos que...	...escribimos cualquiera de estas dos expresiones:		Valores que puede tomar x en los números...	
			naturales	reales
x es igual a 4	$x = 4$	$4 = x$	Solamente 4	Solamente 4
x es distinto de 4	$x \neq 4$	$4 \neq x$	0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14...	Cualquier número real que no sea 4. Por ejemplo, -1526.34 , -7 , -6.32 , -0.001 , 0 , 0.548 , 1 , 2 , 3 , 3.99998 , 4.001 , 6.998 , 7 , 8.56 , 11 , 14 , $18762.15...$
x es mayor que 4	$x > 4$	$4 < x$	5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13...	Cualquier número real que sea mayor que 4. Por ejemplo, 4.0001 , 4.2352 , 5 , 6 , 7.802 , 8 , 10.52 , 12.51 , $14...$
x es menor que 4	$x < 4$	$4 > x$	Solamente 0, 1, 2, 3	Cualquier número real que sea menor que 4. Por ejemplo, -1526.34 , -4 , -2.32 , -0.001 , 0 , $.54$, 1 , 1.56 , 3 , $3.998...$
x es mayor o igual que 4	$x \geq 4$	$4 \leq x$	4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12...	4 y cualquier número real que sea mayor que 4. Por ejemplo, 4 , 4.8947082 , 5 , 6.02 , 8 , 9 , 47.23 , $10.562...$
x es menor o igual que 4	$x \leq 4$	$4 \geq x$	Solamente 0, 1, 2, 3, 4	4 y cualquier número real que sea menor que 4. Por ejemplo, -1526.34 , -4 , -2.3 , -0.01 , 0 , 0.58 , 1 , 1.5 , 2 , 3 , 3.998 , 4

Observa entonces que las expresiones escritas son idénticas a las que usamos con los números naturales y que, como en aquel caso, se pueden leer de izquierda a derecha o de derecha a izquierda. Otra similitud es que nuestro interés está centrado en x , por lo que el sujeto de nuestra frase es x (no 4). Sin embargo, los valores que puede tomar x cuando se trata de números reales (última columna de la tabla) incluyen a los que puede tomar cuando se trata de números naturales (penúltima columna), y salvo en el caso $x = 4$, se agregan muchos otros. La diferencia reside en el hecho de que los números naturales son puntos aislados en la recta numérica, pero los números reales llenan, de manera continua, toda la recta.

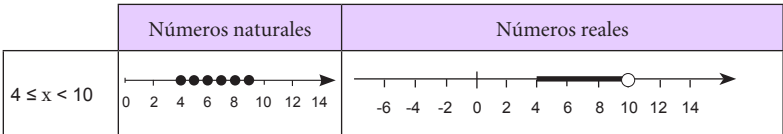
Veamos justamente cómo son, en la recta numérica, dos ejemplos de desigualdades: $x \geq 4$ y $x < 10$. Representaremos los valores posibles con $\bullet$ y, cuando son continuos, con una raya gruesa.

	Números naturales	Números reales
$x \geq 4$		
$x < 10$		

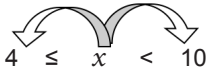
En el caso de la desigualdad $x < 10$ entre números reales, queremos representar que todos los números reales que son menores de 10 (pero no 10) satisfacen la desigualdad, pero la raya gruesa parece que llega al 10: esa representación de $x < 10$ es prácticamente indistinguible de la de $x \leq 10$. Para representar que un conjunto de números NO incluye a uno en especial usaremos el dibujo $\circ$. De esta forma, la representación en la recta numérica de la desigualdad $x < 10$ entre números reales queda así:



De manera similar a cuando hablamos de números naturales, podemos pensar en números reales que cumplan con las dos desigualdades de arriba: que sean mayores o iguales que 4 y además menores que 10. Escribimos eso así: $4 \leq x < 10$, y los números que satisfacen ambas condiciones quedan como se ilustra abajo.



Recuerda que es mejor no leer la expresión $4 \leq x < 10$ de izquierda a derecha, sino que, como el centro de nuestro interés es x , ahí es donde empezamos a leer:


 $4 \leq x < 10$
 x es mayor o igual que 4 y menor que 10

Desigualdades como la anterior se pueden expresar también con intervalos, mismos que veremos a continuación.

Intervalos

Un intervalo es el conjunto de números que se encuentran entre dos números dados, que son los límites o extremos del intervalo. Los límites pueden ser o no parte del intervalo. Para ver cómo es esto, consideremos los siguientes ejemplos:

- En el intervalo **(4.1, 5.2)** están todos los números que son mayores que 4.1 y menores que 5.2. Esto es, son los números x que satisfacen

$$4.1 < x < 5.2$$

Por ejemplo, 4.9 está en el intervalo, porque $4.9 > 4.1$ y porque $4.9 < 5.2$



Expresamos esto así:

$$4.9 \in (4.1, 5.2)$$

(el símbolo $\in$ se lee “está en” o “pertenece a”).

Los números 3.6 y 6.4 no están en el intervalo,



lo que expresamos así:

$$3.6 \notin (4.1, 5.2) \quad \text{y} \quad 6.4 \notin (4.1, 5.2)$$

(el símbolo $\notin$ se lee “no está en” o “no pertenece a”).

Los límites del intervalo, 4.1 y 5.2, tampoco están en él:



$$4.1 \notin (4.1, 5.2) \quad \text{y} \quad 5.2 \notin (4.1, 5.2),$$

porque 4.1 no es mayor que 4.1 (sino igual), y 5.2 no es menor que 5.2 (sino igual).

En resumen:



$$3.6 \notin (4.1, 5.2),$$

$$4.9 \in (4.1, 5.2),$$

$$6.4 \notin (4.1, 5.2)$$

$$4.1 \notin (4.1, 5.2),$$

$$5.2 \notin (4.1, 5.2),$$

- Decimos que los intervalos como $(4.1, 5.2)$, que no incluyen a sus extremos, son **intervalos abiertos**. Utilizamos *paréntesis*: $(\)$ para denotar un intervalo abierto.

- Ahora veremos un intervalo que sí incluye a sus extremos. Decimos que es un **intervalo cerrado** y lo denotamos con *corchetes*: $[\]$. En el intervalo $[4.1, 5.2]$ están todos los números que son mayores o iguales que 4.1 y menores o iguales que 5.2:

$$4.1 \leq x \leq 5.2$$



Aquí,

$$4.1 \in [4.1, 5.2] \quad \text{y} \quad 5.2 \in [4.1, 5.2],$$

porque 4.1 sí es mayor o igual que 4.1, y 5.2 sí es menor o igual que 5.2.

- Los intervalos también pueden ser **semiabierto** (o, lo que es lo mismo, **semicerrados**). Por ejemplo, en el intervalo $[4.1, 5.2)$ están todos los números que son mayores o iguales que 4.1 y menores que 5.2

$$4.1 \leq x < 5.2$$



Aquí,

$$4.1 \in [4.1, 5.2) \quad \text{y} \quad 5.2 \notin [4.1, 5.2),$$

porque 4.1 sí es mayor o igual que 4.1, y 5.2 no es menor que 5.2

- También es un intervalo semiabierto (o semicerrado) el intervalo $(4.1, 5.2]$. En él están todos los números que son mayores que 4.1 y menores o iguales que 5.2

$$4.1 < x \leq 5.2$$



Aquí,

$$4.1 \notin (4.1, 5.2] \quad \text{y} \quad 5.2 \in (4.1, 5.2],$$

porque 4.1 no es mayor que 4.1, y 5.2 sí es menor o igual que 5.2

Decimos que $[4.1, 5.2)$ es cerrado por la izquierda y abierto por la derecha, y que $(4.1, 5.2]$ es abierto por la izquierda y cerrado por la derecha.

Observa que siempre que escribimos un intervalo empezamos por el número menor. Así, cuando se habla del intervalo (a, b) , es claro que b no puede ser menor que a .

Los límites de intervalos (ya sea abiertos o cerrados) pueden ser positivos, negativos o cero; se aplican las mismas reglas que acabamos de presentar, incluyendo que primero se escribe el número más pequeño. Ejemplos:

- $(0, 1)$ son todos los números x tales que $0 < x < 1$
- $[-1.5, 0]$ son todos los números x tales que $-1.5 \leq x \leq 0$
- $[-1.96, -0.32]$ son todos los números x tales que $-1.96 \leq x \leq -0.32$
- $(-2.605, -2.506]$ son todos los números x tales que $-2.605 < x \leq -2.506$
- $(-4.053, 2.62)$ son todos los números x tales que $-4.053 < x < 2.62$
- $[-4.053, 2.62]$ son todos los números x tales que $-4.053 \leq x \leq 2.62$

En resumen, los conjuntos de números con relaciones de orden con dos números reales dados se pueden expresar como desigualdades, o bien, como intervalos. Por ejemplo:

Descripción	Expresión como desigualdad	Expresión como intervalo
• Todos los números que son mayores que 4.1 y menores que 5.2	$4.1 < x < 5.2$	$(4.1, 5.2)$
• Todos los números que son mayores o iguales que 4.1 y menores o iguales que 5.2	$4.1 \leq x \leq 5.2$	$[4.1, 5.2]$
• Todos los números que son mayores o iguales que 4.1 y menores que 5.2	$4.1 \leq x < 5.2$	$[4.1, 5.2)$
• Todos los números que son mayores que 4.1 y menores o iguales que 5.2	$4.1 < x \leq 5.2$	$(4.1, 5.2]$

Hasta ahora hemos visto cómo expresar como intervalos los conjuntos de números que están entre dos números reales dados. Nos falta ver cómo expresar como intervalos conjuntos que satisfacen desigualdades como $x \geq 4$, o como $x < 10$

En el primer caso los números reales que satisfacen la desigualdad $x \geq 4$ son todos los que son mayores o iguales que 4, es decir, de 4 en adelante, números como 4.00001, 6.8, 21, 135273, números tan grandes como queramos, ¡hasta el infinito! Podemos simbolizar el infinito como ∞ , y entonces los conjuntos de números que son mayores o iguales que 4 se pueden expresar de cualquiera de estas formas:

Descripción	Expresión como desigualdad	Expresión como intervalo
Todos los números que son mayores o iguales que 4	$x \geq 4$	$[4, \infty)$

De manera similar, si queremos hablar de todos los números mayores que 4, lo podemos expresar así:

Descripción	Expresión como desigualdad	Expresión como intervalo
Todos los números que son mayores que 4	$x > 4$	$(4, \infty)$

En cuanto a los números reales que satisfacen la desigualdad $x < 10$, son todos los números reales que son menores que 10, lo que incluye por ejemplo a 9.7, 1.5, 0 y todos los negativos, es decir, los números más pequeños, tan pequeños como queramos. Simbolizaremos esto con $-\infty$, y entonces tenemos:

Descripción	Expresión como desigualdad	Expresión como intervalo
Todos los números que son menores que 10	$x < 10$	$(-\infty, 10)$

Finalmente, para hablar de todos los números menores o iguales que 10, tenemos:

Descripción	Expresión como desigualdad	Expresión como intervalo
Todos los números que son menores o iguales que 10	$x \leq 10$	$(-\infty, 10]$

Finalizaremos este párrafo con dos observaciones:

- El símbolo ∞ significa “tan grande como se quiera” y por ello es el segundo término en la notación de intervalo, mientras $-\infty$ significa “tan pequeño como se quiera” y por ello siempre es el primer término en la notación de intervalo.
- Como ∞ y $-\infty$ no son números, nunca se habla de intervalos cerrados en ∞ ni en $-\infty$.

EJERCICIOS

En esta sección no se incluyen ejercicios de orden de números reales ni de ubicación en la recta porque, como se mencionó, la manera de resolverlos es la misma que con números decimales. Si deseas resolver ejercicios de estos tópicos, te recomendamos que consultes los ejercicios 1.21 a 1.26.

Recuerda que los ejercicios con numeración par son similares a los que los preceden. Haz solamente aquellos que consideres necesarios para tu proceso de aprendizaje.

1.27. En cada uno de los siguientes incisos, indica si los números que se dan pertenecen o no al intervalo indicado.

a) Intervalo $[2.4, 3.2)$

- | | | |
|----------|----------|---------|
| • 3 | • 2.4000 | • 2.04 |
| • 2.8 | • 3.17 | • 2.40 |
| • 3.25 | • $5/2$ | • $9/4$ |
| • 3.1999 | | |

b) Intervalo $[-1.05, 1.05]$

- | | | |
|---------|-----------------|-----------|
| • 0 | • 1.03 | • 1.050 |
| • 1 | • $\frac{1}{3}$ | • 0.932 |
| • -1.03 | • 1.049 | • -0.98 |
| • -1.5 | | • -1.0500 |

c) Intervalo $[-7.5, -4.5]$

- | | | |
|---------|---------|---------|
| • -4.49 | • -4.5 | • -4.51 |
| • -5 | • 0 | • -4.99 |
| • -4 | • -7.51 | • -7.49 |

d) Intervalo $(-0.5, -0.3]$

- | | | |
|------------|------------|------------|
| • -0.499 | • -0.250 | • -0.50 |
| • -0.05 | • -0.75 | • -0.299 |
| • -0.301 | • -0.2 | • -0.30 |

e) Intervalo $[3.03, 3.08)$

- | | | |
|-----------|-----------|-----------|
| • $33/10$ | • 3.05 | • 3.079 |
| • 3.01 | • 3.08 | • 3.030 |
| • 3.003 | • 3.025 | • 3.50 |

f) Intervalo $(-4/3, -1/3)$

- | | | |
|-----------|-----------|------------|
| • -1 | • $-3/4$ | • -1.033 |
| • -1.3 | • $-5/4$ | • -1.303 |
| • -0.33 | • -1.33 | |
| • $-1/2$ | • -0.36 | |

1.28. En cada uno de los siguientes incisos, indica si los números que se dan pertenecen o no al intervalo indicado.

a) Intervalo $[-0.65, 0.65]$

- | | | |
|-----------|-----------|------------|
| • -0.59 | • -0.61 | • -0.650 |
| • $6/10$ | • 0.608 | • 0.64 |
| • -1 | • 0.065 | |

b) Intervalo $(5, 5.5]$

- | | | |
|----------|-----------|----------|
| • 5 | • 5.45 | • 5.51 |
| • 5.05 | • 5.49 | • 5.41 |
| • 5.50 | • 5.050 | • 4.99 |

c) Intervalo $(1.29, 1.39)$

- | | | |
|----------|-----------|------------|
| • 1.36 | • 1.4 | • 1.3 |
| • 1.28 | • 1.289 | • $4/3$ |
| • 1.29 | • 1.38 | • 1.2901 |

d) Intervalo $(-1, 1)$

- | | | |
|------------------|-----------------|-------------|
| • 0.85 | • $\frac{3}{2}$ | • 0.757 |
| • 1 | • 1.01 | • -0.9999 |
| • $-\frac{2}{3}$ | • -0.01 | |
| • 0 | • $\frac{5}{5}$ | |

e) Intervalo $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$

- | | | |
|--------|---------|-----------------|
| • 0 | • 1.44 | • $\frac{2}{3}$ |
| • 1.3 | • 1.750 | • 0.25 |
| • 0.5 | • 1 | |
| • 1.05 | • 1.751 | |

f) Intervalo $[0.1, 0.2]$

- | | | |
|---------|--------------------|---------|
| • 0.10 | • 0.150 | • 0.109 |
| • 0.199 | • $\frac{10}{200}$ | • 0.09 |
| • 0.01 | • 0.12 | • 0.200 |

g) Intervalo $(-8.5, 0)$

- | | | |
|----------|------------|-----------|
| • -1.8 | • -10.2 | • -8.6 |
| • 0 | • -0.1 | • -8.51 |
| • -7.5 | • -9 | |
| • -8.5 | • -8.499 | |

2. OPERACIONES

Una vez que ya hemos cubierto las distintas clases de números nos dedicaremos, en este capítulo, a estudiar las operaciones entre ellos. El capítulo consta de cuatro secciones:

- La primera se dedica a las operaciones básicas. Lo que nos parece más importante es que sepas utilizar la calculadora, y que reflexiones en torno a dos aspectos fundamentales: cuándo se usa cada una de las operaciones y qué hacer con los resultados.
- En la segunda sección hablaremos de tres números especiales: el 0, el 1 y el 10, y, a propósito de este último, de la notación científica.
- Posteriormente veremos cómo redondear números.
- Para finalizar, abordaremos los procesos de medición y de la conversión de unidades.

Cabe anotar que en este capítulo trataremos, principalmente, de expresiones con una sola operación (exclusivamente una o varias sumas, una o varias multiplicaciones, etc.). Sin embargo, la mayoría de las expresiones de cálculos que se utilizan en las aplicaciones comunes de las matemáticas (como la Estadística) contienen varias operaciones con números reales. Esas aplicaciones son tan

importantes que el capítulo 4 del libro está consagrado a ver cómo hacer esos cálculos. Tanto este capítulo como el siguiente te prepararán para ello.

2.1. OPERACIONES BÁSICAS

Aquí consideraremos como operaciones básicas de los números a la suma, la resta, la multiplicación, la división, la potenciación y la radicación.

En esta sección dedicaremos un primer apartado a revisar cómo se escriben y cómo utilizar la calculadora para realizar operaciones con números decimales. Un segundo apartado está consagrado a los aspectos matemáticos de las operaciones, y ahí hemos incluido también las operaciones con fracciones; a estos aspectos formales no les concederemos mucha importancia: muchos de esos aspectos, que tú ya seguramente revisaste en tus estudios anteriores, están marcados con pantalla durazno para que los consideres como complemento. En contraposición con ello, hemos consagrado los últimos dos apartados a un par de tópicos que nos parecen más relevantes: para qué se usan las distintas operaciones y cuál es el sentido que pueden tener los resultados obtenidos.

2.1.1. Notación y uso de la calculadora

En este apartado veremos, de cada una de las seis operaciones:

- Cómo se escribe.
- Dónde se encuentra en la calculadora.
- Algunos ejemplos de la operación con diversos números.

Observa que no trataremos aquí de cómo realizar estas operaciones “a mano”. Tú has visto estos modos (llamados algoritmos) en tus estudios previos, cuando te enseñaron, por ejemplo, que para

sumar y restar se debe alinear las unidades con las unidades, las decenas con las decenas y así sucesivamente. Ahora lo que nos parece importante es que aprendas a utilizar la calculadora para obtener los resultados correctos; en el siguiente apartado, si lo deseas, podrás revisar los algoritmos.

Operaciones en la calculadora con números negativos

Para operar con números negativos recuerda que en la calculadora el signo $-$ de un número negativo tiene la tecla especial . Así que para marcar en la calculadora la operación

$$2 + (-6)$$

debes teclear una de las siguientes dos opciones:

o bien

y con cualquiera de ellas obtendrás el resultado -4 . Es decir, para sumar un negativo debes utilizar la tecla ; además puedes utilizar o no paréntesis en torno al número, como cuando escribimos (-6) . En el caso de la suma los paréntesis son opcionales, aunque en otras operaciones sí son necesarios. Nosotras pondremos ejemplos en todos los casos para que veas cuándo son necesarios y cuándo no, pero nuestra sugerencia general es que siempre, al hacer operaciones en la calculadora, se pongan entre paréntesis los números negativos con los que se está operando.

Suma

La operación de suma se representa con el signo $+$, que en la calculadora es la tecla (a la derecha de los dígitos). Los números que se suman se llaman **sumandos**, y también se llama suma al resultado de la operación.

Verifica que al teclear estas operaciones obtienes lo mismo que marcamos aquí:

- $2 + 8 = 10$
- $2 + (-) 8 = -6$ y también $2 + ((-) 8) = -6$
- $(-) 2 + 8 = 6$ y también $((-) 2) + 8 = 6$

Otros ejemplos: realiza con tu calculadora estas sumas y verifica que obtienes el mismo resultado; eso te ayudará a ir aprendiendo el manejo de la calculadora. Prueba con tu calculadora y si el resultado que obtienes no es el que indicamos aquí, o si en la pantalla aparece la letra E o la palabra **ERROR**, consulta el instructivo de la calculadora.

- $-2 + (-8) = -10$
- $1823 + 92 = 1915$
- $8 + (-15) = -7$
- $(-7) + 8 = 1$
- $72.54 + 3.086 = 75.626$
- $(-1.028) + (1.0028) = -0.0252$
- $8.42 + (-8.42) = 0$

Resta

La operación de resta se representa con el signo $-$, que en la calculadora es la tecla $-$ (a la derecha de los dígitos). El resultado de la operación se llama resta o diferencia.

Verifica que al teclear estas operaciones obtienes lo mismo que marcamos aquí:

- $2 - 8 = -6$
- $2 - (-) 8 = 10$ y también $2 - ((-) 8) = 10$
- $(-) 2 - 8 = -10$ y también $((-) 2) - 8 = -10$

Otros ejemplos: realiza con tu calculadora estas restas y comprueba que obtienes el mismo resultado.

- $-2 - (-8) = 6$
- $185 - 42 = 143$

- $42 - 185 = -143$
- $-9.1 - 5.2 = -14.3$
- $-5.2 - 9.1 = -14.3$
- $8 - (-15) = 23$
- $(-0.77) - (-0.88) = 0.11$
- $-72.54 - 3.086 = -75.626$
- $5.17 - 5.17 = 0$
- $(-5.17) - (-5.17) = 0$

Multiplicación

Hay distintas formas de expresar la operación de multiplicación. Por ejemplo, todas las expresiones siguientes indican que se debe multiplicar 3 por 5:

$$3 \times 5 \quad (3) (5) \quad 3 (5) \quad (3) 5 \quad 3 \cdot 5$$

Cuando se utilizan letras, el signo $\times$ puede ser un elemento de confusión con la letra x (equis), por lo que también se expresan las multiplicaciones utilizando un punto “ $\cdot$ ”, paréntesis “()” o simplemente la secuencia. Para expresar “3 por a ” podemos escribir:

$$(3) (a) \quad 3 (a) \quad 3 \cdot a \quad 3a$$

En la calculadora, se usa la tecla $\times$ (a la derecha de los dígitos). Además, en algunas calculadoras se pueden usar las teclas de paréntesis $($ y $)$, como se acaba de indicar.

También hay algunos paquetes de cómputo, como Excel, en los que la multiplicación se suele denotar con el signo $*$. Así, por ejemplo, 347 multiplicado por 17 puede escribirse: $347*17$.

Los números que se multiplican se llaman **factores**, y el resultado de la operación se llama **producto**.

Verifica que al teclear estas operaciones obtienes lo mismo que marcamos aquí:

- $2 \times 8 = 16$
- $2 \times (-) 8 = -16$ y también $2 \times ((-) 8) = -16$
- $(-) 2 \times 8 = -16$ y también $((-) 2) \times 8 = -16$

Otros ejemplos: realiza con tu calculadora estas multiplicaciones y comprueba que obtienes el mismo resultado.

- $(-2) \times (-8) = 16$
- $0.14 \times 0.268 = 0.03752$
- $1.4 \times (-0.25) = -0.35$
- $-1.4 \times (-0.25) = 0.35$
- $896.3407 \times 0 = 0$
- $0.125 \times 8 = 1$
- $-0.002 \times (-0.001) = 0.000002$

Nota: Si al hacer la última operación obtienes un resultado “extraño” en una calculadora tipo Casio, pulsa varias veces la tecla  hasta que aparezca la opción “NORM”, elígela con el número correspondiente y luego pulsa el 2.

División

Para indicar la división 35 entre 5 se puede utilizar cualquiera de las siguientes expresiones:

$$35 \div 5$$

$$\frac{35}{5}$$

$$35/5$$

$$35 : 5$$

$$5 \overline{)35}$$

(Observa que en las primeras cuatro expresiones el número 35 se escribe primero, pero que en la última, el 35 va dentro de la “casita”).

En la calculadora se usa la tecla  (a la derecha de los dígitos). El resultado de la operación de división se llama **cociente**.

Verifica que al teclear estas operaciones obtienes lo mismo que marcamos aquí:

- $2 \div 8 = 0.25$
- $2 \div (-) 8 = -0.25$ y también $2 \div ((-) 8) = -0.25$
- $(-) 2 \div 8 = -0.25$ y también $((-) 2) \div 8 = -0.25$

Otros ejemplos: realiza con tu calculadora estas divisiones y comprueba que obtienes el mismo resultado.

- $-2 \div (-8) = 0.25$
- $0.1752 \div 0.03 = 5.84$
- $-0.1752 \div 0.03 = -5.84$
- $0.1752 \div (-0.03) = -5.84$
- $-0.1752 \div -0.03 = 5.84$
- $-6.3089 \div (-6.3089) = 1$
- $0 \div 47 = 0$

Es importante señalar que **NO SE PUEDE DIVIDIR ENTRE CERO**. Observa qué pasa si tecleas la operación $47 \div 0$ en tu calculadora (para salir de ese mensaje pulsa las teclas **DEL**, **AC** o **C**).

Potenciación

La potenciación se representa con un número pequeño escrito a la derecha y arriba. Por ejemplo, 6 al cuadrado se escribe 6^2 , y 5 elevado a la séptima potencia se escribe 5^7 . En estos ejemplos los números 2 y 7 se llaman **exponentes**, y el resultado de la operación se llama **potencia**.

En la calculadora hay una tecla para elevar al cuadrado, que normalmente aparece como x^2 ; algunas tienen, además, una tecla para elevar al cubo, x^3 y para otras potencias puede haber una tecla x^y o bien una tecla $\wedge$. Algunas calculadoras requieren que se ponga el signo “igual” (es decir, la tecla $=$) después de pulsar estas teclas, si bien en otras no es necesario. Es conveniente que tú sepas cómo funciona tu calculadora.

Hay muchos paquetes de cómputo, como Excel, en los que la potenciación se suele denotar con el signo $\wedge$. Así, por ejemplo, el cuadrado y la séptima potencia de 458 pueden escribirse, respectivamente, 458^2 y 458^7 .

Verifica que al teclear estas operaciones obtienes lo mismo que marcamos aquí:

- $8 \times^2 = 64$ o bien $8 \wedge 2 = 64$
- $2 \times^3 = 8$ o bien $2 \wedge 3 = 8$
- $2 \times^8 = 256$ o bien $2 \wedge 8 = 256$
- $(-3) \times^2 = -9$ PERO EN CAMBIO $((-3)) \times^2 = 9$
- $(-2) \wedge 8 = -256$ PERO EN CAMBIO $((-2)) \wedge 8 = 256$

Observa que al teclear $(-3) \times^2$ le estamos indicando a la calculadora que queremos el negativo del cuadrado de 3, por lo que da el resultado -9 , mientras que al teclear $((-3)) \times^2$ le estamos indicando que queremos el cuadrado del número negativo (-3) . Es decir, para elevar (-3) al cuadrado es necesario teclear los paréntesis en torno a (-3) para que dé el resultado correcto $(-3)^2=9$. De la misma manera, para elevar (-2) a la octava potencia es necesario teclear los paréntesis en torno a -2 para que te dé el resultado correcto $(-2)^8=256$.

Por ello, nuestro consejo es que siempre que eleves a alguna potencia un número negativo, pongas paréntesis en torno a él.

Otros ejemplos: realiza con tu calculadora estas potencias y comprueba que obtienes el mismo resultado.

- $2^4 = 16$
- $(-2)^4 = 16$
- $2^3 = 8$
- $(-2)^3 = -8$
- $0.4^3 = 0.064$
- $(-0.4)^3 = -0.064$
- $6.47^1 = 6.47$
- $0^{58} = 0$
- $1^{58} = 1$

También puede haber **exponentes negativos**. Elevar un número a una potencia con exponente negativo es lo mismo que dividir 1 entre el número elevado al exponente positivo. Por ejemplo:

$$3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{1}{81}$$

(Si haces esta última operación con la calculadora, tecleando $\exists \text{ } \wedge \text{ } (-) \text{ } 4 \text{ } =$, obtendrás el mismo resultado que si tecleas $1 \text{ } \div \text{ } 81$).

Finalmente, en algunas expresiones puedes encontrarte con un **exponente igual a cero**. El resultado de cualquier número (distinto de cero) elevado a una potencia cero es 1. Por ejemplo, puedes verificar en tu calculadora que

$$3^0 = 1$$

$$(-4)^0 = 1$$

$$0.5^0 = 1$$

$$(-0.6)^0 = 1$$

(Si tecleas 0^0 la calculadora te mandará un mensaje de error: efectivamente, esa operación no puede realizarse. Para salir de ese mensaje pulsa las teclas DEL , AC o C).

Radicación

La radicación se representa con el símbolo $\sqrt{}$. Por ejemplo, la raíz cuadrada de 81 se escribe $\sqrt[2]{81}$ o, sencillamente, $\sqrt{81}$, y la raíz cuarta de 1296 se escribe $\sqrt[4]{1296}$. En estos ejemplos los números 2 y 4 se llaman **radicales**, y el resultado de la operación se llama **raíz** ($\sqrt{4096}$ es la “raíz cuadrada” de 4096, $\sqrt[3]{4096}$ es la “raíz cúbica” de 4096, $\sqrt[4]{4096}$ es la “raíz cuarta” de 4096, y a partir de ahí seguimos usando números ordinales para los radicales: raíz quinta, raíz sexta, etc...). Para efectos prácticos consideraremos en este manual solamente radicales enteros de dos en adelante.

En la calculadora hay una tecla para sacar raíz cuadrada, $\sqrt{}$. Algunas calculadoras tienen una tecla para sacar raíces cúbicas, marcada $\sqrt[3]{}$, y/o una tecla para sacar otras raíces, marcada como $\sqrt[n]{}$. Si tu calculadora no cuenta con esta última tecla, puedes calcular cualquier raíz como si fuera una potencia con exponente fraccionario, por ejemplo: $\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}}$.

Verifica que al teclear estas operaciones obtienes lo mismo que marcamos aquí:

- $\sqrt{8} = 2.8284271\dots$ o bien $8 \sqrt{} = 2.8284271\dots$
- $\sqrt[3]{8} = 2$ o bien $3 \sqrt[3]{8} = 2$
- o bien $8 x^y (1 \div 3) = 2$
- o bien $8 ^ (1 \div 3) = 2$
- $\sqrt[3]{(-) 8} = -2$ y también $\sqrt[3]{ ((-) 8) } = -2$

(En algunas calculadoras no es necesario teclear el signo [=] después de las teclas $\sqrt{}$, $\sqrt[3]{}$ ó $\sqrt[n]{}$).

Otros ejemplos: realiza con tu calculadora estas raíces y comprueba que obtienes el mismo resultado.

- $\sqrt[2]{49} = 7$
- $\sqrt{1.44} = 1.2$
- $\sqrt{0.3754} = 0.612698947\dots$
- $\sqrt[3]{0.000008} = 0.02$
- $\sqrt[3]{-2.5} = -1.357208808\dots$
- $\sqrt[2]{0} = 0$
- $\sqrt[2]{1} = 1$
- $\sqrt[4]{81} = 3$

Es importante señalar que entre los números reales **NO SE PUEDE OBTENER UNA RAÍZ PAR DE UN NÚMERO NEGATIVO**, como $\sqrt{-9}$ o como $\sqrt[4]{-81}$. Observa qué pasa si tecleas la operación $\sqrt{-9}$ en tu calculadora (para salir de ese mensaje pulsa las teclas DEL , AC o C).

2.1.2. Desde un punto de vista formal

Significado

La suma es la operación a partir de la cual se pueden definir las demás. Sumar dos números naturales se puede entender como juntar o combinar dos colecciones de objetos. A partir de esa

operación básica, las demás operaciones se pueden entender así desde un punto de vista formal:

- La resta es la operación inversa de la suma
- La multiplicación es equivalente a repetir sumas
- La división es la operación inversa de la multiplicación
- La potenciación es equivalente a repetir multiplicaciones
- La radicación es la operación inversa de la multiplicación

Veamos esto en unos ejemplos:

- $4 + 3 = 7$. Si hay una colección con 4 elementos y otra con 3, la colección que se forma al juntar las dos tiene 7 elementos
- $7 - 3 = 4$. El resultado de la resta, 4, es el número que sumado a 3 da 7
- $4 \times 3 = 12$. Si se suma a sí mismo 3 veces, el resultado es 12; es decir $4 + 4 + 4 = 12$
- $12 \div 3 = 4$. El resultado de la división, 4, es el número que multiplicado por 3 da 12
- $4^3 = 64$. Si se multiplica 4 por sí mismo 3 veces, el resultado es 64; es decir $4 \times 4 \times 4 = 64$
- $\sqrt[3]{64}$. El resultado de la raíz, 4, es el número que elevado al exponente 3 da 64

Algoritmos de las operaciones con enteros y decimales

Como ya mencionamos, si tú vas a realizar los cálculos con tu calculadora no es indispensable que conozcas las maneras de realizar “a mano” las operaciones, pero las puedes recordar así:

Aquí daremos por sentado que conoces los algoritmos para realizar la suma, la resta, la multiplicación y la división con números naturales. El énfasis que haremos está en el manejo de los decimales y de los números negativos.

Te recomendamos leer las reglas y repetir los ejemplos. Además de hacerlos “a mano”, si lo deseas, realízalos en la calculadora.

Suma

- Para sumar se alinean los números con el punto decimal.
- Para sumar dos números de igual signo se suman los valores absolutos y el resultado tiene el mismo signo que los sumandos.
- Para sumar un número positivo y un número negativo se resta el de mayor valor absoluto menos el de menor valor absoluto, y el resultado tiene el signo del de mayor valor absoluto.

Por ejemplo, como

$$\begin{array}{r} 15.008 \\ + 0.27 \\ \hline 15.278 \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{r} 15.008 \\ - 0.27 \\ \hline 14.738 \end{array}$$

entonces

- $15.008 + 0.27 = 15.278$
- $(-15.008) + (-0.27) = -15.278$
- $(-15.008) + 0.27 = -14.738$
- $15.008 + (-0.27) = 14.738$

En la calculadora, se recomienda poner entre paréntesis los números negativos con los que se está operando; así, la segunda de estas operaciones se puede teclear:

$$(-) 15.008 + ((-) 0.27) =$$

Resta

- Para restar se alinean los números con el punto decimal.
- Al restar un número positivo de otro número positivo el signo del resultado es positivo si el primer número es mayor que el otro, y negativo si es menor.
- Restar un número positivo de un número negativo es lo mismo que sumar los dos valores absolutos, y el resultado tiene signo negativo.

- Restar un número negativo de otro (positivo o negativo) es lo mismo que sumar su valor absoluto.

Por ejemplo, como

$$\begin{array}{r} 15.008 \\ - 0.27 \\ \hline 14.738 \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{r} 15.008 \\ + 0.27 \\ \hline 15.278 \end{array}$$

entonces

- $15.008 - 0.27 = 14.738$
- $0.27 - 15.008 = -14.738$
- $-15.008 - 0.27 = -15.278$
- $15.008 - (-0.27) = 15.278$
- $-15.008 - (-0.27) = -14.738$

En la calculadora, se recomienda poner entre paréntesis los números negativos con los que se está operando; así, la tercera de estas operaciones se puede teclear:

$$(\quad)(-) 15.008 \quad - \quad (\quad)(-) 0.27 \quad) \quad =$$

Multiplicación

- Se multiplican los números como si fueran enteros (es decir, sin el punto decimal), y al resultado se le ponen tantas cifras decimales como la suma de las cifras decimales que tengan cada uno de los dos números.
- Si los dos números tienen el mismo signo, se multiplican los dos valores absolutos y el resultado tiene el signo positivo.
- Si los dos números tienen diferente signo, se multiplican los dos valores absolutos y el resultado tiene el signo negativo.

Ejemplos:

- $0.032 \times 5.1627 = 0.1652064$
- $(-3.2) \times (-5.181) = 16.5792$
- $(-0.032) \times 5.1 = -0.1632$
- $0.032 \times (-5.1) = -0.1632$
- $0.15 \times 0.3 = 0.045$
- $1.4 \times 0.25 = 0.35$

Comentarios:

- En el penúltimo de los ejemplos, como el resultado debe tener $2+1=3$ cifras decimales, hubo que agregar un cero a la izquierda del 4.
- El último de los ejemplos parece contradecir la primera regla (porque el resultado, en vez de tener 3 cifras decimales, solo tiene 2). Sin embargo, lo que se tiene es

$$1.4 \times 0.25 = 0.350 = 0.35$$

En la calculadora, se recomienda poner entre paréntesis los números negativos con los que se está operando; así, la segunda de estas operaciones se puede teclear:

The image shows a sequence of calculator keypad buttons: an opening parenthesis '(', a negative sign '(-)', the number '3.2', a closing parenthesis ')', a multiplication sign 'x', another opening parenthesis '(', another negative sign '(-)', the number '5.181', another closing parenthesis ')', and finally an equals sign '='.

División

- Se multiplican $\times 10$ los dos números cuantas veces sea necesario hasta que el divisor sea un número entero (el divisor es el número que queda “fuera de la casita”, o sea el número entre el cual se divide). Después se divide respetando el lugar del punto decimal.
- Si los dos números tienen el mismo signo, se dividen los dos valores absolutos y el resultado tiene el signo positivo.

- Si los dos números tienen diferente signo, se dividen los dos valores absolutos y el resultado tiene el signo negativo.
- **NO SE PUEDE DIVIDIR ENTRE CERO.**

Ejemplo:

Para calcular $0.1752 \div 0.03$,

$$0.03 \overline{) 0.1752}$$

Multiplicamos por 100 los dos números

Y ahora tenemos

$$3 \overline{) 17.52}$$

(Puedes verificar en tu calculadora que las dos divisiones de arriba dan el mismo resultado).

Después se divide de la forma usual, respetando el lugar del punto decimal:

$$\begin{array}{r} 5.84 \\ 3 \overline{) 17.52} \\ \underline{25} \\ 012 \\ \underline{0} \end{array}$$

Y así

$$0.1752 \div 0.03 = 17.52 \div 3 = 5.84$$

Otros ejemplos:

- $0.32 \div 0.004 = 80$
- $(-3.2) \div (-0.000004) = 800,000$
- $(-0.032) \div 0.4 = -0.08$
- $0.000032 \div (-0.4) = -0.00008$

Observa qué pasa en tu calculadora si tecleas $75 \div 0$ (para salir de ese mensaje pulsa las teclas **DEL**, **AC** o **C**).

En la calculadora, se recomienda poner entre paréntesis los números negativos con los que se está operando; así, la segunda de estas operaciones se puede teclear

$$((-) 3.2) \div ((-) 0.000004) =$$

Potenciación

- Se multiplica el número por sí mismo tantas veces como indique el exponente.
- Si el exponente es par, el resultado es siempre positivo.
- Si el exponente es impar, el signo del resultado es el signo del número original.

Ejemplos:

- $0.3^2 = 0.09$
- $(-0.3)^2 = 0.09$
- $0.05^3 = 0.000125$
- $(-0.05)^2 = 0.0025$
- $(-0.05)^3 = -0.000125$

Es pertinente comentar que elevar a una potencia es multiplicar un número por sí mismo varias veces, por lo que las reglas son las mismas que las de la multiplicación. En particular:

- El número de cifras decimales del resultado es el número de cifras decimales del número original, multiplicado por el exponente

$$0.4^3 = 0.4 \times 0.4 \times 0.4 = 0.064$$

- Las potencias pares siempre son positivas, y las potencias impares de un número tienen el mismo signo que el número.

En la calculadora, es necesario poner entre paréntesis los números negativos con los que se está operando; así, la segunda de estas operaciones se puede teclear



Radicación

Te recomendamos siempre realizar las operaciones de radicación con la calculadora.

- Las raíces impares tienen el signo del número original.
- Hay dos raíces pares de cada número positivo: una es positiva y una negativa (sin embargo, la calculadora solo da el resultado positivo).
- **NO SE PUEDEN OBTENER RAÍCES PARES DE NÚMEROS NEGATIVOS.**

Ejemplos:

- $\sqrt[3]{1.728} = 1.2$
- $\sqrt[3]{-1.727} = -1.199738...$
- $\sqrt{23} = 4.7958...$ y $\sqrt{23} = -4.7958...$
- $\sqrt[4]{256} = 4$ y $\sqrt[4]{256} = -4$
- Observa qué pasa en tu calculadora si tecleas $\sqrt{-9}$ o $\sqrt[4]{-0.0625}$

En la calculadora, se recomienda poner entre paréntesis los números negativos con los que se está operando; así, la segunda de estas operaciones se puede teclear

$$\sqrt[3]{} \quad (\quad (-) \quad 1.727 \quad) \quad =$$

En la mayoría de las aplicaciones de matemáticas con las que te enfrentarás, no necesitarás obtener raíces que no sean raíces cuadradas. Sin embargo, si tienes que calcular una raíz que no sea raíz cuadrada y tu calculadora no tiene la tecla $\sqrt[n]{}$, puedes utilizar el siguiente resultado general:

$$\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$$

Este resultado se usa cuando $n \neq 0$ y, en general, cuando n es un número natural.

Así, si requieres calcular $\sqrt[5]{-35.2}$ y tu calculadora no tiene tecla $\sqrt[n]{}$, puedes teclear $(\quad -35.2 \quad) \quad ^ \quad (\quad 1 \div 5 \quad) \quad =$ para encontrar el resultado $-2.03848975...$

Algoritmos de las operaciones con fracciones

Entre las fracciones se pueden efectuar las mismas operaciones básicas que con los números naturales; tienen los mismos significados y propiedades y se usan los mismos símbolos. Para realizarlas se pueden seguir ciertas reglas o utilizar la calculadora.

A continuación te proponemos varias operaciones con las fracciones $\frac{9}{4}$ y $\frac{2}{5}$. Realízalas “a mano”, o con la calculadora, y verifica que obtienes el mismo resultado. Si haces el cálculo “a mano” o con una calculadora que maneje fracciones, debes encontrar como resultado la fracción que indicamos. En las otras calculadoras, la fracción se teclea como una división y entre paréntesis, como $\frac{9}{4} = (9 \div 4)$; si lo haces así el resultado estará expresado en forma decimal. Aquí damos el resultado de las dos formas

- $\frac{9}{4} + \frac{2}{5} = \frac{53}{20} = 2.65$
- $\frac{9}{4} - \frac{2}{5} = \frac{37}{20} = 1.85$
- $\frac{9}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10} = 0.9$
- $\frac{9}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{45}{8} = 5.625$
- $\left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{81}{16} = 5.0625$
- $\sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)} = \frac{3}{2} = 1.5$

En general, el uso más frecuente de las fracciones está restringido a las fracciones positivas. Es por ello que aquí no se habla de fracciones negativas; sin embargo, en caso de necesitar operar con fracciones negativas, puedes seguir las mismas reglas acerca de los números positivos y negativos que se señalaron anteriormente.

Por otra parte, para operar con fracciones mixtas conviene manejarlas mediante una fracción equivalente, o directamente en una calculadora que maneje fracciones mixtas: consulta el instructivo de la tuya si te ves en la necesidad de operar con fracciones mixtas.

Suma

- Se convierte cada una de las dos fracciones en otra equivalente, de tal modo que las dos nuevas tengan el mismo denominador. El resultado de la suma es una fracción cuyo denominador es el denominador común y cuyo numerador es la suma de los (nuevos) numeradores.

Ejemplo:

$$\frac{9}{4} + \frac{2}{5} = \frac{9 \times 5}{4 \times 5} + \frac{2 \times 4}{5 \times 4} = \frac{45}{20} + \frac{8}{20} = \frac{45 + 8}{20} = \frac{53}{20}$$

Verificación con la calculadora:

$$\frac{9}{4} + \frac{2}{5} = (9 \div 4) + (2 \div 5) = 2.65$$

y también $\frac{53}{20} = 53 \div 20 = 2.65$

Otros ejemplos:

- $\frac{5}{8} + \frac{4}{7} = \frac{67}{56} = 1.1964...$

- $\frac{1}{7} + \frac{2}{9} = \frac{23}{63} = 0.365079...$

Resta

- Misma regla que con la suma, restando en lugar de sumar.

Ejemplo:

$$\frac{9}{4} - \frac{2}{5} = \frac{9 \times 5}{4 \times 5} - \frac{2 \times 4}{5 \times 4} = \frac{45}{20} - \frac{8}{20} = \frac{45 - 8}{20} = \frac{37}{20}$$

Verificación con la calculadora:

$$\frac{9}{4} - \frac{2}{5} = (9 \div 4) - (2 \div 5) = 1.85,$$

y también $\frac{37}{20} = 37 \div 20 = 1.85$

Otros ejemplos:

- $\frac{5}{8} - \frac{2}{7} = \frac{19}{56} = 0.339...$
- $\frac{5}{7} - \frac{7}{17} = \frac{363}{119} = 0.30252...$

Multiplicación

- El resultado es una fracción cuyo numerador es el producto de los dos numeradores y cuyo denominador es el producto de los dos denominadores.

Ejemplo:

$$\frac{9}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{9 \times 2}{4 \times 5} = \frac{18}{20}$$

Verificación con la calculadora:

$$\frac{9}{4} \times \frac{2}{5} = (9 \div 4) \times (2 \div 5) = 0.9$$

y también $\frac{18}{20} = 18 \div 20 = 0.9$

Otros ejemplos:

- $\frac{5}{8} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{48} = 0.104...$
- $\frac{3}{7} \times \frac{7}{3} = \frac{21}{21} = 1$

División

- El resultado es el mismo que el de multiplicar la primera fracción por el inverso de la segunda (es decir, invirtiendo el numerador y el denominador)

Ejemplo:

$$\frac{9}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{9}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{9 \times 5}{4 \times 2} = \frac{45}{8}$$

Verificación con la calculadora:

$$\frac{9}{4} \div \frac{2}{5} = (9 \div 4) \div (2 \div 5) = 5.625$$

y también $\frac{45}{8} = 45 \div 8 = 5.625$

Otros ejemplos:

- $\frac{3}{7} \div \frac{7}{3} = \frac{9}{49} = 0.183673...$
- $\frac{4}{5} \div \frac{6}{7} = \frac{28}{30} = 0.9333....$

Potenciación

- El resultado es una fracción cuyo numerador es el numerador elevado a la potencia indicada, y cuyo denominador es el denominador elevado a la misma potencia.

Ejemplo:

$$\left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{9^2}{4^2} = \frac{81}{16}$$

Verificación con la calculadora:

$$\left(\frac{9}{4}\right)^2 = (9 \div 4) \times^2 = 5.0625,$$

y también $\frac{81}{16} = 81 \div 16 = 5.0625$

Otros ejemplos:

- $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{2}{25} = 0.36$
- $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 0.25$

Radicación

- El resultado es una fracción cuyo numerador es la raíz del numerador, y cuyo denominador es la raíz del denominador.

Ejemplo:

$$\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$$

Verificación con la calculadora:

$$\sqrt{\frac{9}{4}} = \sqrt{\square} \left(\square 9 \div \square 4 \right) \square = 1.5,$$

y también $\frac{3}{2} = 3 \div 2 = 1.5$

Otros ejemplos:

- $\sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5} = 0.2$
- $\sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{6}{7} = 0.85714...$

Propiedades de las operaciones

Si te interesa conocer las propiedades matemáticas de las operaciones en los distintos conjuntos de números (naturales, enteros, racionales, reales), además de una explicación acerca de por qué hay tres operaciones que no se pueden realizar (la división entre cero, las raíces pares de negativos y 0^0), lo puedes ver a continuación:

Aquí se revisarán las propiedades de las operaciones entre los números naturales ($\mathbb{N}$), los enteros ($\mathbb{Z}$), los racionales ($\mathbb{Q}$) y los reales ($\mathbb{R}$). No consideraremos las propiedades de las operaciones entre los números complejos ($\mathbb{C}$), debido a que los números complejos prácticamente no se utilizan en la vida diaria.

En cada conjunto de números hay operaciones cuyo resultado siempre está en el conjunto y otras que no. Por ejemplo, dos números naturales siempre se pueden sumar y el resultado es un número natural (como $13 + 88 = 101$, que es un número natural), pero a veces la resta de dos números naturales no es un número natural (como $5 - 13$). La siguiente tabla ilustra cuáles operaciones siempre tienen resultados dentro de cada conjunto.

	Suma y resta	Multiplicación y división	Potenciación y radicación
Números naturales	$+$  $-$  La suma siempre es un número natural, la resta no  por ejemplo, no hay un número natural que sea el resultado de $3 - 5$	$\times$  $+$  El producto siempre es un número natural, el cociente no  por ejemplo, no hay un número natural que sea el resultado de $3 \div 5$	x^a  $\sqrt{\quad}$  La potencia siempre es un número natural (salvo 0^0), la raíz no  por ejemplo, no hay números naturales que sean el resultado de $\sqrt{2}$ ni $\sqrt[3]{2}$
Números enteros	$+$  $-$  La suma y la resta siempre son números enteros  ahora sí hay un número entero que es el resultado de $3 - 5$, porque $3 - 5 = -2$	$\times$  $\div$  El producto siempre es un número entero, el cociente no  por ejemplo, no hay un número entero que sea el resultado de $3 \div 5$	x^a  $\sqrt{\quad}$  La potencia siempre es un número entero (salvo 0^0), la raíz no  por ejemplo, no hay números enteros que sean el resultado de $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt[3]{-2}$ ni $\sqrt[4]{4}$
Números racionales	$+$  $-$  La suma y la resta son siempre números racionales	$\times$  $\div$  El producto siempre es un número racional. Si se divide entre un número que no sea 0 el cociente siempre es racional.  ahora sí hay un número racional que es el resultado de $3 \div 5$, porque $3 \div 5 = 0.6$	x^a  $\sqrt{\quad}$  La potencia siempre es un número racional (salvo 0^0), la raíz no  por ejemplo, no hay números racionales que sean el resultado de $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt[3]{-2}$, $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ó $\sqrt[3]{-0.28}$
Números reales	$+$  $-$  La suma y la resta siempre son números reales	$\times$  $\div$  El producto siempre es un número real. Si se divide entre un número que no sea 0 el cociente siempre es un número real.	x^a  $\sqrt{\quad}$  La potencia (salvo 0^0) y las raíces impares siempre son números reales  no hay raíces pares de negativos. Por ejemplo, no hay un número real que sea el resultado de $\sqrt{-2}$

Las operaciones entre números reales tienen muchas propiedades matemáticas. Aquí enunciamos algunas de ellas, con ejemplos que te invitamos a repetir en tu calculadora.

Propiedad conmutativa

- La suma SÍ la tiene, es decir, puede cambiarse el orden de los sumandos. Por ejemplo $13 + 7 = 7 + 13$, y esa relación es cierta para cualesquiera dos sumandos.
- La resta NO la tiene. Por ejemplo, $13 - 7 \neq 7 - 13$ (recuerda que el signo $\neq$ quiere decir “no es igual a”, o bien, “es distinto de”).
- La multiplicación SÍ la tiene, es decir, puede cambiarse el orden de los factores. Por ejemplo, $13 \times 7 = 7 \times 13$, y esa relación es cierta para cualesquiera dos factores.
- La división NO la tiene. Por ejemplo, $13 \div 7 \neq 7 \div 13$.
- La potenciación NO la tiene. Por ejemplo, $13^7 \neq 7^{13}$.
- La radicación NO la tiene. Por ejemplo, $\sqrt[3]{13} \neq \sqrt[13]{7}$.

Propiedad asociativa

- La suma SÍ la tiene, es decir, la suma de tres números cualesquiera puede hacerse en cualquier orden. Por ejemplo $(13 + 5) + 2$ es $18 + 2 = 20$, y ese es también el resultado de $13 + (5 + 2) = 13 + 7$.
- La resta NO la tiene. Por ejemplo, $(13 - 5) - 2$, que es $8 - 2 = 6$, es distinto de $13 - (5 - 2)$, que es $13 - 3 = 10$.
- La multiplicación SÍ la tiene, es decir, el producto de tres números cualesquiera puede hacerse en cualquier orden. Por ejemplo, $(13 \times 5) \times 2$ es $65 \times 2 = 130$, y ese es también el resultado de $13 \times (5 \times 2) = 13 \times 10$.
- La división NO la tiene. Por ejemplo, $(13 \div 5) \div 2$, que es $2.6 \div 2 = 1.3$, es distinto de $13 \div (5 \div 2)$, que es $13 \div 2.5 = 5.2$.

Propiedad distributiva

Esta propiedad relaciona la suma (y la resta) con la multiplicación (y la división).

- Es lo mismo multiplicar un número por la suma (o por la resta) de dos números, que sumar (o restar) el producto del primero con cada uno de ellos. Por ejemplo $2 \times (13 + 5)$ es igual a $2 \times 18 = 36$, y ese es también el resultado de $2 \times 13 + 2 \times 5 = 26 + 10$.
- Es lo mismo dividir una suma (o una resta) entre un número, que sumar (o restar) el cociente de cada sumando entre el divisor. Por ejemplo $(13 - 5) \div 2$ es igual a $8 \div 2 = 4$, y ese es también el resultado de $13 \div 2 - 5 \div 2 = 6.5 - 2.5$.

Observaciones importantes

¡OJO! No es lo mismo:

- La suma de los cuadrados no es lo mismo que el cuadrado de la suma. Por ejemplo, $2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$, pero $(2+3)^2 = 5^2 = 25$.
- La suma de dos raíces no es lo mismo que la raíz de la suma. Por ejemplo, $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$, pero $\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

Operaciones con el número 0:

- Al sumarle cero a cualquier número, el número permanece sin cambio. Por ejemplo, **$13 + 0 = 13$** .
- Al restarle cero a cualquier número, el número permanece sin cambio. Por ejemplo, **$13 - 0 = 13$** .
- Al multiplicar por cero cualquier número el resultado es cero. Por ejemplo, **$13 \times 0 = 0$** .
- Se puede dividir cero entre cualquier número. Por ejemplo, **$0 \div 13 = 0$** .
- Como se dijo antes, NO SE PUEDE dividir entre cero. Por ejemplo, **$13 \div 0$ NO SE PUEDE EFECTUAR**.
- Al elevar cero a cualquier potencia distinta de cero se obtiene cero. Por ejemplo, **$0^{13} = 0$** .

- Al elevar cualquier número distinto de cero al exponente 0 se obtiene 1. Por ejemplo, $13^0 = 1$.
- NO SE PUEDE EFECTUAR 0^0 NI USAR 0 COMO RADICAL (por ejemplo $\sqrt[0]{13}$).
- Cualquier raíz de cero es cero. Por ejemplo, $\sqrt[13]{0} = 0$.

Operaciones con el número 1:

- Al multiplicar por 1 cualquier número, el número permanece sin cambio. Por ejemplo, $13 \times 1 = 13$.
- Al dividir entre 1 cualquier número, el número permanece sin cambio. Por ejemplo, $13 \div 1 = 13$.
- Al elevar cualquier número al exponente 1 éste permanece sin cambio. Por ejemplo, $13^1 = 13$.
- Cualquier raíz de 1 es 1. Por ejemplo, $\sqrt[13]{1} = 1$.

Operaciones imposibles

El que no se puedan realizar las tres operaciones que marcamos como imposibles tiene explicaciones, que se presentan en seguida. Verifica con tu calculadora todos los ejemplos que se muestran a continuación.

¿Por qué no se puede dividir entre cero?

Como se mencionó al principio, cuando se divide

$$36 \div 3 = ?$$

se busca un número que multiplicado por 3 dé 36, o sea $? \times 3 = 36$, y el resultado es 12 porque 12 es el número que multiplicado por 3 da 36, ya que $12 \times 3 = 36$. Es decir,

$$36 \div 3 = 12$$

Asimismo, si se quiere dividir

$$0 \div 7 = ?$$

se busca un número que multiplicado por 7 dé 0. O sea, $? \times 7 = 0$, y ese número es 0, porque $0 \times 7 = 0$. Por lo tanto

$$0 \div 7 = 0.$$

Sin embargo, si se quiere dividir

$$5 \div 0 = ?$$

se busca un número que multiplicado por 0 dé 5. O sea, $? \times 0 = 5$, ¡y ese número no existe, porque todos los números multiplicados por 0 dan 0, así que ninguno puede dar 5!

¿Por qué entre los números reales no hay raíces pares de números negativos?

Pensemos en la raíz cuadrada, es decir, la usual. Como se mencionó al principio, cuando se calcula

$$\sqrt{36} = ?$$

se busca un número que multiplicado por sí mismo dé 36, o sea $? \times ? = 36$, y el resultado es 6, porque 6 es el número que multiplicado por sí mismo da 36; es decir, $6 \times 6 = 36$. Por lo tanto,

$$\sqrt{36} = 6$$

Incluso si se quiere calcular

$$\sqrt{0} = ?$$

se busca un número que multiplicado por sí mismo dé 0. O sea, $? \times ? = 0$, y ese número es 0, porque $0 \times 0 = 0$. Por lo tanto

$$\sqrt{0} = 0.$$

Sin embargo, si se quiere calcular

$$\sqrt{-36} = ?$$

se busca un número que multiplicado por sí mismo dé -36 . O sea, $? \times ? = -36$. Pero ¡cualquier número real distinto de cero multiplicado por sí mismo da un resultado positivo! Porque los dos números tienen el mismo signo, así que el producto no puede dar -36 .

¿Por qué no se puede elevar 0 a la potencia 0?

El resultado de la operación 0^0 , si atendemos a la regla “cualquier potencia de 0 es 0”, sería 0. Pero si atendemos a la regla “cualquier número elevado a la potencia 0 da como resultado 1”, el resultado de 0^0 sería 1. Como sabemos bien que 0 y 1 son números distintos, el resultado de 0^0 no está definido.

2.1.3. Para qué se usan las operaciones

Las cuatro operaciones básicas se pueden utilizar para resolver problemas de diversa índole. A continuación enlistaremos algunos de los problemas tipo que se pueden resolver con cada una de ellas, con la aclaración de que no pretendemos que la lista sea exhaustiva sino solamente presentar algunas muestras.

Suma

Algunas situaciones en las que usamos una suma son cuando queremos:

- conocer cuántos elementos resultan de juntar dos (o más) colecciones distintas de cosas similares; por ejemplo, si en un salón hay 31 alumnos de 4.º grado, en otro hay 27 y en uno más hay 30, en total los alumnos de 4.º grado son $31 + 27 + 30 = 88$;
- unir dos (o más) medidas o cantidades: dos (o más) longitudes, dos (o más) capacidades, dos (o más) precios, etc., siempre y cuando estén en la misma unidad de medida; por ejemplo, cuando caminamos siguiendo dos lados consecutivos de una cancha de fútbol de 104.7 m de largo y 71.2 m de ancho, hemos caminado $104.7 + 71.2 = 175.9$ m; o bien, si en una bolsa tenemos \$4.50, en otra \$51.30 y en otra \$10.00, en total tenemos $4.50 + 51.30 + 10 = \$65.80$;

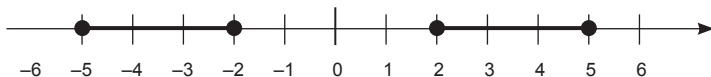
- aumentarle algo a una medida o cantidad; por ejemplo, cuando sabemos que si llegan a cenar 6 personas y se les unen otras 7, habrá en total $6 + 7 = 13$ personas para la cena; o bien, si la temperatura es de -4.3°C y sube 2.6°C , queda en -1.7°C , es decir, 1.7°C bajo cero;
- saber *a qué* número hay que restarle otro para tener un resultado dado (si $x-a=b$, entonces $x=a+b$); por ejemplo si sabemos que pagamos \$203 por una mercancía que tenía \$16 de descuento, podemos encontrar que el precio original era de $203 + 16 = \$219$.

Resta

Algunas situaciones en las que usamos una resta son cuando queremos:

- conocer cuántos elementos quedan en una colección cuando quitamos de ella algunos elementos; por ejemplo, si de los 31 alumnos inscritos en un grupo se presentan 26 a un examen, podemos saber que $31 - 26 = 5$ alumnos faltaron al examen;
- saber cómo queda una medida si se le quita algo; por ejemplo, si la temperatura ayer era de -4°C y hoy bajó 3°C , la temperatura de hoy es $-4 - 3 = -7^{\circ}\text{C}$; o bien, si en un recipiente hay 15.2 litros de agua y se extraen 3.7 litros, quedan $15.2 - 3.7 = 11.5$ litros;
- saber qué número hay que sumarle a otro para tener un resultado dado (si $x+a=b$, $x=b-a$); por ejemplo si por unas tijeras de \$42.90 y una engrapadora pagué \$105.80, puedo saber que la engrapadora me costó $105.80 - 42.90 = \$62.90$;
- saber qué número hay que restarle a otro para tener un resultado dado (si $a-x=b$, entonces $x=a-b$); por ejemplo si de 5432 aspirantes a entrar a una universidad fueron aceptados 2301, se puede saber que los rechazados fueron $5432 - 2301 = 3131$.

Interpretación geométrica. El valor absoluto de la diferencia de dos números es la distancia entre esos dos números. Por ejemplo, considera los puntos -5 , -2 , 2 y 5 :

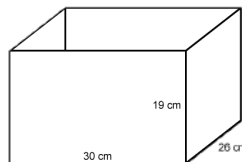


- La distancia entre -5 y -2 (o entre -2 y -5) es de 3 unidades, y también es de 3 unidades la distancia entre 5 y 2 (o entre 2 y 5). Con los valores absolutos expresamos esto así:
- $|-5 - (-2)| = |-3| = 3$ $|5 - 2| = |3| = 3$
- $|-2 - (-5)| = |3| = 3$ $|2 - 5| = |-3| = 3$

Multiplicación

Algunas situaciones en las que usamos una multiplicación son cuando queremos:

- conocer el resultado de repetir muchas veces la misma suma (con colecciones, o con mediciones); por ejemplo, si compro 6 cuadernos de \$39.90 cada uno, pagaré en total $6 \times 39.90 = \$234.40$; o bien, si se juntan 3 paquetes de 1.8 kg cada uno, en total pesarán 5.4 kg;
- hacer cálculos relativos al área de figuras conociendo las longitudes; por ejemplo, una cancha de fútbol de 104.7 m de largo y 71.2 m de ancho tiene un área de $104.7 \times 71.2 = 7454.64 \text{ m}^2$;
- hacer cálculos relativos al volumen de cuerpos; por ejemplo, una caja que mide 30 cm de largo, 26 cm ancho y 19 cm de alto tiene un volumen de $30 \times 26 \times 19 = 14820 \text{ cm}^3$;
- saber qué número hay que dividir entre otro para tener un resultado dado (si $x \div a = b$, $x = a \cdot b$); por ejemplo, si un pastel se pagó entre 7 personas y cada quien puso \$42, el pastel costó $7 \times 42 = \$294$;



- hacer cálculos en situaciones de proporcionalidad; por ejemplo, si quiero cubrir de pasto la cancha de futbol, y el metro cuadrado de pasto cuesta \$9.40, tendré que pagar $7454.64 \times 9.40 = \$70,074$; o si lleno de aserrín una caja como la del dibujo y sé que 1 m^3 de aserrín pesa 315 kg, mi caja pesará $0.014820 \times 315 = 4.668 \text{ kg}$ (convirtiendo los 14820 cm^3 que habíamos obtenido a 0.014820 m^3 ; estas conversiones serán revisadas en la última sección del capítulo). Otras situaciones de proporcionalidad típicas son los porcentajes y las escalas; el capítulo 5 de este libro está consagrado a la proporcionalidad.

División

Algunas situaciones en las que usamos una división son cuando queremos:

- repartir o compartir; por ejemplo, si voy a repartir el precio del pastel (\$294) entre 7 personas, cada quien pagará $294 \div 7 = \$42$; o bien, si se reparten 1.26 kilos (1,260 gramos) de leche en polvo en 45 bolsas, en cada una quedarán 28 gramos de leche en polvo;
- distribuir; por ejemplo, si se reparten 1,260 gramos de leche en polvo en bolsas de 28 gramos cada una, quedarán 45 bolsas; o bien, si un grupo de 36 personas se va a repartir en equipos de 3 personas, se formarán $36 \div 3 = 12$ equipos;
- saber cuántas veces cabe algo en otra cosa; por ejemplo, si de un rollo de listón de 91.4 m se van a cortar etiquetas para ropa de 4.9 cm, saldrán $91.4 \div 0.049 = 1865$ etiquetas (convirtiendo los cm a metros);
- conocer qué parte de un todo es una porción; por ejemplo, si 18 kg de cacahuates se empacan en bolsas de 3 kg cada una, cada bolsa contendrá $3 \div 18 = \frac{1}{6}$ de la cantidad total de cacahuates;

- saber qué número hay que multiplicar por otro para tener un resultado dado (si $x \cdot a = b$, $x = b \div a$); por ejemplo, si cada semana ahorro \$4.50 y después de un tiempo he juntado \$180, ese tiempo es de $180 \div 4.50 = 40$ semanas;
- saber entre qué número hay que dividir otro para tener un resultado dado (si $a \div x = b$, $x = a \div b$); por ejemplo, si sé que el pastel costó \$294 y que cada persona contribuyó con \$42, puedo deducir que participaron $294 \div 42 = 7$ personas;
- hacer cálculos en situaciones de proporcionalidad; las situaciones de proporcionalidad, de las que son típicas las escalas y los porcentajes, dan pie a muchas operaciones de multiplicación y división. Como se apuntó arriba, a ellas está dedicado el capítulo 5.

Potenciación

Son raras las situaciones de la vida práctica en las que usamos una potenciación; algunas son cuando queremos:

- conocer el resultado de repetir muchas veces la misma multiplicación; por ejemplo, si pongo mi dinero por un año en una caja de ahorros en la que cada mes mi dinero se multiplica por 1.002, al cabo del año mi dinero se multiplicará por $1.002^{12} = 1.0242657679454$ (o sea que si ahorro \$1000 al cabo de un año tendré algo más de \$1024);
- hacer cálculos relativos al área de cuadrados conociendo la longitud del lado; por ejemplo, una jardinera cuadrada de 0.7 m de largo tiene un área de $0.7^2 = 0.49$ m²;
- hacer cálculos relativos al volumen de cubos conociendo la longitud de la arista; por ejemplo, una caja cúbica de 5.6 cm de arista tiene un volumen de $5.6^3 = 175.616$ cm³.

Radicación

También son raras las situaciones de la vida práctica en las que usamos una radicación; algunas son cuando queremos:

- conocer el lado de un cuadrado conociendo su área; por ejemplo, un muro cuadrado de 6.25 m^2 de área mide de lado $\sqrt{6.25} = 2.5 \text{ m}$;
- conocer la arista de un cubo conociendo su volumen; por ejemplo, una caja cúbica de 1.728 m^3 tiene una arista de $\sqrt[3]{1.728} = 1.2 \text{ m}$;
- aplicar el Teorema de Pitágoras; por ejemplo, si queremos conocer cuánto mide la diagonal de la cancha de fútbol a la que nos hemos referido, mide $\sqrt{(104.7^2 + 71.2^2)} = \sqrt{16031.53} = 126.62 \text{ m}$;
- saber qué número hay que elevar a una potencia conocida para tener un resultado dado (si $x^a=b$, $x=\sqrt[a]{b}$); por ejemplo, si sé que en otra caja de ahorros con rendimiento anual mi dinero se multiplica por 1.12 al cabo de tres años, eso significa que cada año mi dinero se multiplica por $\sqrt[3]{1.12} = 1.0384988$.

2.1.4. ¿Tiene sentido?

Es muy importante considerar con cuidado el resultado de una operación. Unas veces tiene sentido, otras no, aun cuando se trata de la misma operación. Veamos dos ejemplos de cada operación, uno con sentido y otro sin sentido.

- Consideremos la suma $\frac{3}{4} + \frac{1}{2}$. Si a una olla en la que ya tengo $\frac{3}{4}$ de taza de leche le agrego $\frac{1}{2}$ taza, tendré $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$ de taza de leche en la olla. Pero si a una taza en la que ya tengo $\frac{3}{4}$ de taza de leche pretendo agregarle $\frac{1}{2}$ taza, la taza se desbordará.
- Consideremos la resta $8-10$ y la resta $800-1000$. Si hay una temperatura de 8°C y la temperatura disminuye 10°C , llegamos a una temperatura de -2°C : dos grados Celsius bajo cero. Si tengo en la tarjeta de crédito un saldo a favor de \$800

y compro con ella un regalo por \$1,000, termino con $-\$200$: un saldo en contra de \$200. Pero si tengo en un sobre los \$800 en efectivo y pretendo comprar ese mismo regalo de \$1,000, simplemente no podré.

- Consideremos la multiplicación 3×1.5 . Si tengo una receta para 4 personas que requiere 3 tazas de harina y 3 huevos, y quiero prepararla para 6 personas, tengo que multiplicar todas las cantidades por 1.5 (porque $4 \times 1.5 = 6$). Con la harina no hay problema: pondré $3 \times 1.5 = 4.5$ tazas, o sea 4 tazas y media. Pero es más difícil agregar 4.5 huevos.
- Consideremos la división $1 \div 40$. Si reparto un costal de azúcar entre 40 personas, a cada persona le toca $\frac{1}{40}$ de costal (por ejemplo, si el costal es de 20 kg, a cada quien le toca medio kilo de azúcar). Pero si pretendo repartir un panqué entre 40 personas, termino con muchas migajas...

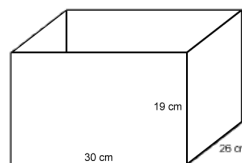
El resultado de una operación con frecuencia debe ser ajustado, pero a veces hay que ajustarlo en un sentido y a veces en otro. Por ejemplo:

- Supongamos que una maestra anuncia a sus alumnos que a la calificación que obtuvieron le sumará 2 puntos si entregan un trabajo final y le restará 3 puntos si no lo entregan. Pensemos en cuatro alumnos: Diego había obtenido 6 puntos y sí entregó el trabajo, Ernesto también había obtenido 6 puntos pero no entregó el trabajo, Félix había obtenido 9 puntos y sí entregó el trabajo, y Gerardo había obtenido 2 puntos y no entregó el trabajo. Entonces las calificaciones finales de Diego y Ernesto son respectivamente 8 y 3, ¿pero qué pasará con Félix y con Gerardo? Félix obtendría una calificación de 11 y Gerardo una de -1 , pero ambas calificaciones son imposibles; entonces en vez de 11, que es mayor a la máxima calificación, se le asigna 10 a Félix, y en vez de -1 , que es inferior a la mínima calificación, se le asigna 0 a Gerardo.

- Consideremos la división $330 \div 40 = 8.25$
 - Si el dueño de una tiendita compra una caja de 40 paletas en \$330, cada paleta le sale a \$8.25; este resultado, con todo y los 25 centavos, tiene sentido porque así puede calcular el precio de venta al menudeo.
 - Si vamos a transportar 330 personas en camiones de 40 pasajeros y queremos saber cuántos camiones debemos rentar, el resultado de 8.25 camiones no tiene sentido, porque no hay tal cosa como $\frac{1}{4}$ de camión. En este caso tendríamos que rentar 9 camiones, aunque los pasajeros viajen holgados...
 - Si vamos a envasar 330 ml de perfume en pequeños envases de 40 ml, para venderlos, y queremos saber cuántos envases podremos vender, el resultado de 8.25 no tiene sentido, por la misma razón de que no hay tal cosa como $\frac{1}{4}$ de envase. Pero en este caso tampoco tiene sentido considerar 9 envases porque no los llenaríamos: ahora tenemos que considerar que podemos vender 8 envases de 40 ml (en total 320 ml) y el resto (10 ml) tal vez para uso personal...

Por último, pero no por ello menos importante, hablaremos de otra circunstancia en la que es altamente conveniente preguntarnos si el resultado de una operación tiene sentido: para verificar si la operación fue efectuada correctamente.

Para ello es sumamente útil, antes de hacer el cálculo, estimar el resultado: adivinar aproximadamente cuánto va a resultar. Por ejemplo, ¿como de qué tamaño es una caja como la del dibujo: como un estuche para un anillo, como una caja de zapatos, como un piano? ¿Podías haber predicho más o menos cuánto pesa si se la llena de aserrín? Digamos: ¿pesará lo mismo que una persona adulta, un gato, un ratón? Si tenemos una idea del resultado, podemos ver si el resultado final concuerda con esa



idea o no; si sí concuerda, lo más probable es que estemos bien; si no concuerda, habrá que verificar si lo que estuvo mal fue la estimación o el cálculo.

Es decir, tener una idea del resultado ayuda a detectar errores de cálculo; por ejemplo, si no convertimos las unidades de medida para estar hablando siempre de m^3 , dm^3 o cm^3 , en el cálculo de lo que pesa la caja llena de aserrín podríamos haber llegado a un resultado como 4,668,300 kg, o sea más de 4 mil toneladas (¡más o menos la producción anual de sorgo en el estado de Colima!), pero como que una cajita así no puede llegar a pesar tanto, ¿no crees? También es muy importante expresar el resultado en la unidad de medida adecuada; de medición hablaremos en la última sección del capítulo.

EJERCICIOS

Recuerda que los ejercicios con numeración par son similares a los que los preceden. Haz solamente aquellos que consideres necesarios para tu proceso de aprendizaje.

2.01. En los siguientes incisos, haz primero una estimación del resultado aproximado. Después resuelve con tu calculadora las operaciones que se indican.

a) $-4 + 4$

b) $-5 - (-5)$

c) $5 - (-5)$

d) $-14 + (-8)$

e) $98 + 13$

f) $-35 - 17$

g) $10 + (-2) - 24$

h) $0 + (-56)$

i) $480 - (-380) + 280 - (-180)$

2.02. En los siguientes incisos, resuelve con tu calculadora las operaciones que se indican.

a) $6 + (-6)$

b) $-8 + 3$

c) $-8 + 10$

d) $-5 - (-4)$

e) $-5 - (-9)$

f) $9 - 7$

g) $15 - 2$

h) $7 + (-23)$

i) $-107 - (-45)$

j) $-23 + 11$

k) $15 - (-21)$

l) $-12 + 18$

m) $46 - 84$

n) $-9 + (-14)$

o) $8 - (-4) - 10$

p) $-1002 - (-1002)$

q) $-180 + 280 - 380 + 480$

r) $1302 - (-256) + (-256)$

2.03. En los siguientes incisos, resuelve con tu calculadora las operaciones que se indican.

a) $5(-3)$

b) $-18 \div (-3)$

c) $21 \div (-7)$

d) $-15 \times 11(-6)$

e) $48 / (12 \times 4)$

f) $56 \times 5 \times 4 / (-2)$

g) $1 + (-1) \times (-1) \div (-1)$

h) $(13)(10) \div (-5)(-1)$

i) $8 \times (-2)(-5) / (-15)$

2.04. En los siguientes incisos, resuelve con tu calculadora las operaciones que se indican.

a) 28×32

b) $(12)(-10)$

c) $15 \div 5$

d) $-24 / -8$

e) $7(-11)$

f) $8(-4)(-5)$

g) $6 \div (-12)$

h) $120(-11) \times 10$

i) $-12 \times (5 \times 8)$

2.05. En los siguientes incisos, resuelve con tu calculadora las operaciones que se indican. Observa que los corchetes [] cumplen las mismas funciones que los paréntesis ().

- | | |
|---------------------|-------------------------------|
| a) 3^4 | e) $[(-4)^2]^{-3}$ |
| b) $2^6 - 4^4$ | f) $(-11)^3 + (-10)^4 - 80^2$ |
| c) $\sqrt{(125)^2}$ | g) $(34) \div (5)^{-2}$ |
| d) $[(-4)^2]^3$ | h) $(18 \times 3)^{-3}$ |

2.06. En los siguientes incisos, resuelve con tu calculadora las operaciones que se indican.

- | | |
|---------------------|-----------------------|
| a) 5^2 | f) $(\sqrt[5]{72})^5$ |
| b) 6^{-2} | g) $(1/18)^{-1}$ |
| c) $2^5 \times 5^2$ | h) $7^3 (-11)^2$ |
| d) $15^3 / 15^2$ | i) 10^{-4} |
| e) $4^5 / 4^{-3}$ | j) (-6^6) |

2.07. En cada inciso di cuáles números son iguales:

- a) 1.025 , 1.0250 , 1.25 , -1.02500, 1.250 , 10×0.125
- b) 0.13004 , $1.304/10$, 10.3004×10^{-2} , $103.0040/10^{-3}$, 0.0103004
- c) $\frac{1}{4}$, 1.025 , 12500 , 1.250 , $12.5/10$, $\frac{10}{8}$, 0.25 , 1250×10^3 , $\frac{1}{8}$
- d) 650.308 , $6500.308/10$, 0.65308×10^3 , $(-1)(-650.3080)$, 650.03080
- e) 70.03 , $703/10$, -70.030 , 7.3×10 , $-70300/10^2$, -7.003×10 , 700300×10^{-4}
- f) -0.00980 , $9.8 \times (-10)^{-3}$, $-980 \times (-10)^{-5}$, -9.8 , -0.0098 , 0.98×10^{-2} , $-9800/1000$

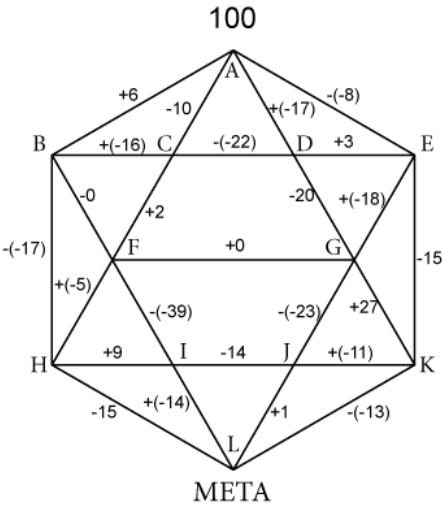
2.08. En cada inciso di cuáles números son iguales:

- a) -0.0802 , -0.802 , $-(-0.0802)$, -0.8020 , 0.0802 , $802/(-100)$
- b) 650.308 , $6500.308/10$, 0.65308×10^3 , $-(-650.3080)$, 650.03080
- c) 2.035 , 2.0350 , 2.35 , $(-1)(-2.03500)$, 2.350 , 10×0.235
- d) -0.0802 , -0.802 , 0.0802 , -0.8020 , 802×10^{-4} , $802/(-100)$
- e) 0.13004 , $1.304/10$, 10.3004×10^{-2} , $103.0040/10^{-3}$, 0.0103004
- f) 18.05 , 180.5 , 18.0500 , 18.500 , 180.50 , $1805/100$
- g) 3450.103 , 3450.1030 , -3450.103 , $34.50103/10$, 3450103×10^{-3} , 3.450×10^3
- h) -7.45 , $(-1)745/10$, $.0745 \times 10$, $.0745 \times 100$, $-745/10^2$, $74.50/(-10)$
- i) -8045.67 , 8.04567×10^{-1} , 0.804567 , $80.4567/10^{-2}$, $(-10)804.567$, -8045.670 , $8.456700 \times (-10)^2$

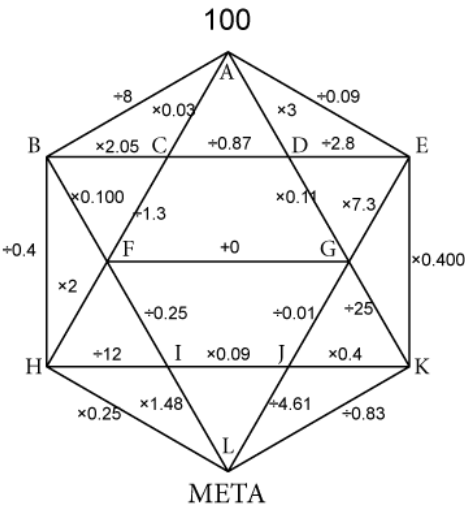
2.09. Considera las siguientes dos "telarañas" como un juego, que puedes jugar solo(a) o con otros compañeros.

- Sin hacer cálculos, elige el camino que consideres que te dará más puntos y márcalo con color. Las reglas para moverse en la telaraña son las siguientes:
 - Se empieza el juego con 100 puntos. Debes llegar a la meta siguiendo el camino de las operaciones que pienses que te dará más puntos. No debes pasar dos veces por la misma letra.
- Usa tu calculadora para hacer los cálculos del camino elegido y obtener su total. Para ello, es importante que teclees la tecla  después de cada operación.
- Si juegas con otras personas, comparen sus resultados y comenten lo que observen. Si juegas solo(a), vuelve a intentar otro camino y compara los resultados de ambos caminos.
- Otra versión del juego puede consistir en llegar al menor resultado posible.

a) Sumas y restas:

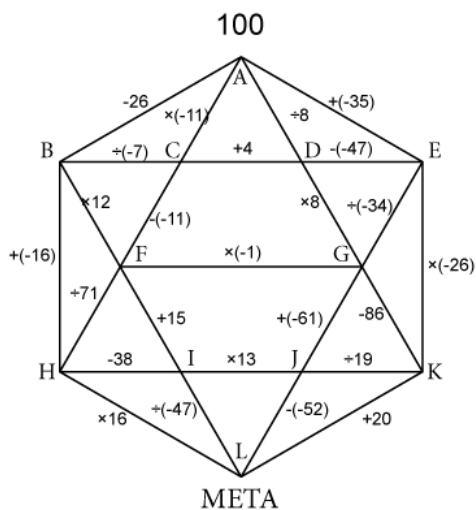


b) Multiplicaciones y divisiones

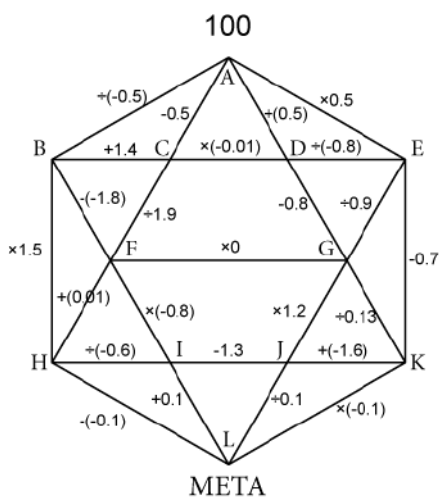


2.10. Considera las siguientes dos “telarañas” para jugar este juego, con las mismas reglas que en el ejercicio anterior.

a) *Operaciones con números enteros*



b) *Operaciones con números decimales*



2.11. Son frecuentes ciertas afirmaciones acerca de los números y las operaciones. Te invitamos a que consideres algunas. Para responder las siguientes preguntas, consulta las operaciones que se han realizado en los ejemplos y ejercicios, y si crees que la afirmación no es cierta, da un ejemplo en que ocurra lo contrario. Así, si nos preguntamos

¿Es cierto que mientras más cifras decimales tenga un número decimal es más pequeño?

La respuesta es:

No, porque por ejemplo, 4.21312 tiene más cifras decimales que 4.1 pero es más grande que él.

- a) ¿Es cierto que mientras más cifras decimales tenga un número decimal es más grande?
- b) ¿Es cierto que sumarle algo a un número siempre lo agranda?
- c) ¿Es cierto que restarle algo a un número siempre lo achica?
- d) ¿Es cierto que multiplicar un número siempre lo agranda?
- e) ¿Es cierto que dividir un número siempre lo achica?

¿Se te ocurre cómo podrían modificarse las afirmaciones que resultaron falsas para que sí resulten ciertas?

2.12. Responde las siguientes preguntas como en el ejercicio anterior.

- a) ¿Es cierto que elevar un número a alguna potencia siempre lo agranda?
 - b) ¿Es cierto que sacarle raíz a un número siempre lo achica?
- ¿Se te ocurre cómo podrían modificarse las afirmaciones que resultaron falsas para que sí resulten ciertas?

2.13. Resuelve los problemas que se plantean en los siguientes incisos.

- a) Unos albañiles tienen que colocar 3942 ladrillos de una barda. Si han colocado cuatro hileras de 175 ladrillos cada una, ¿cuántos ladrillos deben colocar todavía?
- b) En una cafetería, tres amigos ordenaron dos entradas de \$57.00 cada una y cinco bebidas de \$24.00 cada una. Pagaron la cuenta entre todos, por partes iguales; ¿cuánto pagó cada uno?
- c) Luis decidió que cada día dedicará 15 minutos a leer por cada hora que juegue videojuegos. Si ayer estuvo leyendo una hora y media, ¿cuánto tiempo estuvo jugando videojuegos?
- d) Calcula cuántos años vivieron los siguientes emperadores romanos: Julio César, que nació en 100 a.C. y murió en 44 a.C.; Claudio, que nació en 10 a.C. y murió en 54 d.C.; y Nerón, que nació en 37 d.C. y murió en 68 d.C.

2.14. Resuelve los problemas que se plantean en los siguientes incisos.

- a) Un terreno rectangular tiene una superficie de 585 m^2 . Si el frente mide 18 metros, ¿cuánto mide de fondo?
- b) El dueño de un taller dará a cada uno de sus empleados 20 días de salario como aguinaldo. Cinco de sus empleados ganan mensualmente \$6,823.72 y dos ganan \$8,710.05. ¿Cuánto destinará el dueño al pago de aguinaldos?
- c) Un automóvil tiene un tanque de gasolina con capacidad de 60 litros y su rendimiento es de 14.5 km por litro. Si se llena el tanque y se recorren 623.5 km sin volver a cargar combustible, ¿aproximadamente cuánta gasolina queda en el tanque?
- d) Durante una semana se tomó la temperatura ambiente a la misma hora y en el mismo lugar. Indica cuántos grados Celsius subió o bajó la temperatura cada día. El lunes era de 3°C , el martes de -5°C , el miércoles -12°C , el jueves -4°C , el viernes 0°C , el sábado -1°C y el domingo 8°C .

2.15. Resuelve los problemas que se plantean en los siguientes incisos.

- a) Edith debe empacar 75 platos en cajas, en cada una de las cuales caben 8 platos. ¿Cuántas cajas necesita?
- b) Martín fabrica calcetines. Tiene almacenados 636 calcetines que va a enviar en paquetes iguales a sus 8 clientes. ¿Cuántos pares de calcetines debe enviar a cada cliente?
- c) Tengo \$1,400 para comprar tazas. Si cada una cuesta \$89.90, ¿cuántas tazas puedo comprar?
- d) María de la Luz piensa preparar una crema de zanahoria, que requiere $\frac{3}{4}$ de litro de leche; unos ejotes con salsa bechamel, que requieren $\frac{1}{2}$ de litro de leche; y un arroz con leche, para el que necesita $1\frac{1}{2}$ litros. Va a hacer sus compras en el supermercado, ¿cuántos litros de leche debe comprar?



2.16. Resuelve los problemas que se plantean en los siguientes incisos.

- a) Cierta pintura vinílica viene en cubetas de 19 litros y tiene un rendimiento de 10 m^2 por litro. Si se van a pintar por ambos lados cuatro bardas que miden 35 metros de largo por 2.5 metros de alto cada una, ¿cuántas cubetas hay que comprar?
- b) En una alberca de 6 carriles van a hacer competencias eliminatorias para elegir a los nadadores que hagan los 3 mejores tiempos. Si hay 21 competidores, ¿cuántas eliminatorias deben hacerse?
- c) Carmen debe hacer paquetes de 8 camisetas. Tiene 276 camisetas; ¿cuántos paquetes iguales puede hacer?
- d) Se compraron 15 cajas de 20 plantitas cada una. Si se quiere usar las plantitas para adornar el borde de una glorieta de 34 m de circunferencia, ¿qué distancia debe haber entre plantita y plantita?
- e) Carlos Enrique está organizando en la escuela que dirige una fiesta del día del niño para los 219 alumnos, a quienes les va

a dar al final bolsitas de dulces. Si quiere meter en cada bolsita 4 paletas de dulce, ¿cuántos paquetes de 50 paletas debe comprar?

- f) En un puesto de jugos utilizan aproximadamente 4 naranjas para cada vaso. ¿Cuántos vasos se pueden hacer con 137 naranjas?

2.2. OPERACIONES CON TRES NÚMEROS ESPECIALES: 0, 1 Y 10

En esta sección nos ocuparemos de ver algunas operaciones con los números 0, 1 y 10, porque tienen características particulares.

2.2.1. El cero: ¿qué ocurre al operar con él?

La siguiente tabla es un resumen de algunas operaciones con el número 0.

Operación	Ejemplos
Al sumarle cero a cualquier número, el número permanece sin cambio.	$13 + 0 = 13$
Al restarle cero a cualquier número, el número permanece sin cambio.	$13 - 0 = 13$
Al restarle cualquier número a cero se obtiene el mismo número con el signo cambiado.	$0 - 13 = -13$ $0 - (-13) = 13$
Al multiplicar por cero cualquier número, el resultado es cero.	$13 \times 0 = 0$
Al dividir cero entre cualquier número, el resultado es cero.	$0 \div 13 = 0$
NO SE PUEDE DIVIDIR ENTRE CERO.	$13 \div 0$
Al elevar cero a cualquier potencia distinta de 0 se obtiene cero.	$0^{13} = 0$
Al elevar cualquier número distinto de cero al exponente 0 se obtiene 1.	$13^0 = 1$
NO SE PUEDE ELEVAR 0 A LA POTENCIA 0.	0^0
Cualquier raíz de cero es cero.	$\sqrt[13]{0} = 0$

2.2.2. El uno: ¿qué ocurre al operar con él?

La siguiente tabla es un resumen de algunas operaciones con el número 1.

Operación	Ejemplos
Sumar muchas veces 1 es lo mismo que contar	
Al multiplicar por 1 cualquier número, el número permanece sin cambio.	$13 \times 1 = 13$
Al dividir entre 1 cualquier número, el número permanece sin cambio.	$13 \div 1 = 13$
Al elevar cualquier número al exponente 1, este permanece sin cambio.	$13^1 = 13$
Al elevar 1 a cualquier exponente se obtiene 1	$1^{13} = 1$
Cualquier raíz de 1 es 1.	$\sqrt[13]{1} = 1$

2.2.3. El diez y sus potencias

El número 10 es la base de nuestro sistema de numeración y debido a ello tiene algunas características interesantes. Aquí hablaremos de las potencias de 10.

Una potencia de 10 cuyo exponente es *positivo*, siempre tendrá como resultado la unidad seguida de tantos ceros como indique el exponente. Por ejemplo:

$10^3 = 1000$
 $10^6 = 1,000,000$
 $10^7 = 10,000,000$

Una potencia de 10 cuyo exponente es *negativo* es lo mismo que 1 dividido entre 10 elevado al exponente positivo. Por ejemplo,

$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0.001$
 $10^{-6} = \frac{1}{10^6} = \frac{1}{1000000} = 0.000001$
 $10^{-7} = \frac{1}{10^7} = \frac{1}{10000000} = 0.0000001$

Una regla práctica es que las potencias de 10 con exponente negativo tienen como resultado un número decimal con cero unidades y un 1 colocado en el lugar indicado por el exponente. Por ejemplo:

$10^{-3} = 0.001$ el 1 está en el 3.º lugar después del punto

$10^{-6} = 0.000001$ el 1 está en el 6.º lugar después del punto

$10^{-7} = 0.0000001$ el 1 está en el 7.º lugar después del punto

Finalmente, la potencia de 10 con exponente *cero* es igual a 1, porque cualquier número (que no sea 0) elevado al exponente 0 da como resultado 1:

$$10^0 = 1$$

Verifica todos estos resultados con tu calculadora. Para ello, puedes usar la tecla 10^x . Observa, por ejemplo, qué ocurre cuando tecleas $10^x \exists =$ y cuando tecleas $10^x (-) \exists =$.

Nota: Si al hacer las operaciones anteriores obtienes resultados “extraños” en una calculadora tipo Casio, pulsa varias veces la tecla MODE hasta que aparezca la opción “**NORM**”, elígela con el número correspondiente y luego pulsa el 2.

En resumen,

	⋮	
10^{-5}	=	0.00001
10^{-4}	=	0.0001
10^{-3}	=	0.001
10^{-2}	=	0.01
10^{-1}	=	0.1
10^0	=	1
10^1	=	10
10^2	=	100
10^3	=	1000
10^4	=	10000
10^5	=	100000
	⋮	

Multiplicación y división con potencias de diez

Multiplicar un número real por 10 es muy fácil. Observa algunos ejemplos:

$$7 \times 10 = 70$$

$$-4,580 \times 10 = -45,800$$

$$0.6 \times 10 = 6$$

$$-0.731 \times 10 = -7.31$$

Verifica estos resultados en tu calculadora. Observa que cuando se trata de multiplicar un número entero por 10, podríamos decir que la regla es agregar un cero al final. Pero esa regla deja de funcionar cuando estamos hablando de números decimales (¡por ejemplo, 0.6×10 no es 0.60!). En cambio, la regla general es: “para multiplicar un número por 10 se corre el punto decimal un lugar a la derecha”. Esa regla sirve también para los números enteros; por ejemplo,

como $7 = 7.0$, multiplicar por 10 es también correr el punto decimal un lugar a la derecha: $7 \times 10 = 70$. Es decir, podemos expresar la regla así:

☞ Para multiplicar un número por 10 se corre el punto decimal un lugar a la derecha; si faltan cifras, se usan ceros.

Dividir entre diez también es fácil. Observa los siguientes ejemplos y verificalos en tu calculadora:

$$7 \div 10 = 0.7$$

$$-4,580 \div 10 = -458$$

$$0.6 \div 10 = 0.06$$

$$-0.731 \div 10 = -0.0731$$

Ahora la regla se puede expresar así:

☞ Para dividir un número entre 10 se corre el punto decimal un lugar a la izquierda; si faltan cifras, se usan ceros.

Esas reglas se pueden ampliar a potencias de 10. Primero veremos qué pasa cuando las potencias de 10 tienen exponente positivo; luego, cuando el exponente es negativo; y finalmente, veremos el caso del exponente 0. Las potencias de 10 con exponente positivo son números como los siguientes:

100, 1,000, 10,000, 100,000, ...

Como hemos visto, otra manera de expresar estos números es, respectivamente,

10^2 , 10^3 , 10^4 , 10^5 , ...

Ahora las dos reglas se pueden expresar así:

Cuando los exponentes son *positivos*:

- ☞ Para multiplicar un número por una potencia de 10 se corre el punto decimal a la derecha tantos lugares como sea el exponente; si faltan cifras, se usan ceros.
- ☞ Para dividir un número entre una potencia de 10 se corre el punto decimal a la izquierda tantos lugares como sea el exponente; si faltan cifras, se usan ceros.

Por ejemplo, he aquí algunas multiplicaciones por potencias de 10 con exponente positivo:

$$13 \times 100 = 1300$$

$$-547 \times 10 = -5470$$

$$-3.08 \times 1000 = -3080$$

$$0.0543 \times 10^2 = 5.43$$

$$-15.27 \times 10^5 = -1527000$$

Y algunas divisiones entre potencias de 10 con exponente positivo:

$$4.56 \div 10 = 0.456$$

$$-3.08 \div 1000 = -0.00308$$

$$0.0543 \div 100 = 0.000543$$

$$8956 \div 10^6 = 0.008956$$

$$-15.27 \div 10^5 = -0.0001527$$

Ahora veamos cómo hacer las multiplicaciones y divisiones con potencias de diez con exponentes *negativos*. Para ello recordemos que esas potencias son lo mismo que 1 entre 10 elevado al exponente positivo. Nosotras te recomendamos que siempre realices estas operaciones con la calculadora. Veamos dos multiplicaciones (¡verificalas!):

$$4.56 \times 10^{-1} = 4.56 \times \frac{1}{10} = 0.456$$

$$-67.89 \times 10^{-3} = -67.89 \times \frac{1}{1000} = -0.06789$$

Y ahora dos divisiones:

$$4.56 \div 10^{-1} = 4.56 \div \frac{1}{10} = 45.6$$

$$-67.89 \div 10^{-3} = -67.89 \div \frac{1}{1000} = -67890$$

Finalmente, como $10^0 = 1$, multiplicar un número por 10^0 o dividirlo entre 10^0 es lo mismo que no hacerle ninguna operación:

$$4.56 \times 10^0 = 4.56$$

$$-67.89 \times 10^0 = -67.89$$

$$0.0543 \div 10^0 = 0.0543$$

$$-15.27 \div 10^0 = -15.27$$

A modo de resumen, veamos un ejemplo de un número real multiplicado y dividido por diferentes potencias de diez:

$\vdots$		
$1.267 \times 10^{-5} =$	0.00001267	$1.267 \div 10^{-5} =$ 126700
$1.267 \times 10^{-4} =$	0.0001267	$1.267 \div 10^{-4} =$ 12670
$1.267 \times 10^{-3} =$	0.001267	$1.267 \div 10^{-3} =$ 1267
$1.267 \times 10^{-2} =$	0.01267	$1.267 \div 10^{-2} =$ 126.7
$1.267 \times 10^{-1} =$	0.1267	$1.267 \div 10^{-1} =$ 12.67
$1.267 \times 10^0 =$	1.267	$1.267 \div 10^0 =$ 1.267
$1.267 \times 10^1 =$	12.67	$1.267 \div 10^1 =$ 0.1267
$1.267 \times 10^2 =$	126.7	$1.267 \div 10^2 =$ 0.01267
$1.267 \times 10^3 =$	1267	$1.267 \div 10^3 =$ 0.001267
$1.267 \times 10^4 =$	12670	$1.267 \div 10^4 =$ 0.0001267
$1.267 \times 10^5 =$	126700	$1.267 \div 10^5 =$ 0.00001267
$\vdots$		$\vdots$

Para facilitar la realización de estas operaciones, lo importante es que sepas utilizar tu calculadora: no dejes de verificar con ella las operaciones que acabamos de ejemplificar. Para ello utiliza nuevamente la tecla 10^x . Por ejemplo, la primera de la serie de operaciones se puede teclear: $1.267 \times 10^x (-) 5 =$ y la última se puede teclear: $1.267 \div 10^x 5 =$.

Una de las aplicaciones más frecuentes de las multiplicaciones y divisiones con potencias de diez ocurre cuando se hacen conversiones

de unidades dentro del Sistema Internacional (SI) de medidas (esto se estudiará en la última sección de este capítulo).

Notación científica

La notación científica utiliza números decimales de un solo dígito distinto de 0 en la parte entera, y potencias (positivas o negativas) de 10. Generalmente se usa para expresar números muy grandes o muy pequeños, con la finalidad de facilitar la lectura, la comparación, la comprensión del tamaño o dimensión y algunas operaciones. Es importante que aprendas a leer números expresados de este modo, porque a veces la calculadora arroja resultados con esta notación y ocurren, también a veces, en publicaciones científicas o cotidianas. Veamos algunos ejemplos:

- Números con valor absoluto grande

Notación científica	Notación convencional
3.45×10^6	3,450,000
-5.89467×10^{11}	-589,467,000,000
1.8×10^{12}	1,800,000,000,000

- Números con valor absoluto pequeño

Notación científica	Notación convencional
3.45×10^{-6}	0.00000345
-5.89467×10^{-11}	-0.0000000000589467
1.8×10^{-12}	0.0000000000018

El exponente al que está elevado el número 10 indica cuántos lugares hay que recorrer el punto decimal. Cuando el exponente es positivo, como en los tres primeros ejemplos, el punto se debe recorrer hacia la derecha; cuando el exponente es negativo, el punto decimal debe recorrerse hacia la izquierda.

En la pantalla de tu calculadora la potencia de 10 puede presentarse de distintas maneras, por ejemplo: el número 1.8×10^{-12} puede verse de algunas de estas formas:



$$1.8 \times 10^{-12}$$



$$1.8 \times 10^{-12}$$



$$1.8 \times 10^{-12}$$

Nota: A las calculadoras tipo Casio es posible pedirles que no expresen números muy pequeños con notación científica sino convencional: para ello pulsa varias veces la tecla  hasta que aparezca la opción “NORM”, elígela y luego pulsa el $\frac{\square}{\square}$.

EJERCICIOS

Recuerda que los ejercicios con numeración par son similares a los que los preceden. Haz solamente aquellos que consideres necesarios para tu proceso de aprendizaje.

2.17. Resuelve las siguientes operaciones y después verifica el resultado con tu calculadora.

a) 5.3243×10^2

f) $156.32 \div 10^4$

b) 632.58×10^4

g) $0.487 \div 10^3$

c) 6.708×10^{-3}

h) $6.3148 \div 10^4$

d) 0.0326×10^{-2}

i) $0.05701 \div 10^{-3}$

e) 6.34025701×10^0

2.18. Resuelve las siguientes operaciones y después verifica el resultado con tu calculadora.

- a) 1×10^0

b) 156×10^{-4}

c) 0.033×10^{-1}

d) 0.00521×10^2

e) 0.0014×10^{-2}

f) 56347.12×10^4
- g) $0 \div 10^8$

h) $0.006041 \div 10^{-2}$

i) $1687 \div 10^5$

j) $0.0021 \div 10^3$

k) $123.456789 \div 10^{-4}$

l) $82.002 \div 10^{-1}$

2.19. Resuelve con tu calculadora las siguientes operaciones y expresa el resultado en notación científica y notación convencional.

	Operación	Notación convencional	Notación científica
a)	$123456789 + 987654321$		
b)	$0.3008 - 0.3$		
c)	6975×18600		
d)	0.007×0.007		
e)	14400×2197000		
f)	$14400 \div 2197000$		
g)	$4 \div 598$		
h)	$45 \div 0.0000002$		
i)	$\sqrt{0.00001}$		
j)	0.00001^2		

2.20. Resuelve con tu calculadora las siguientes operaciones y expresa el resultado en notación científica y notación convencional.

	Operación	Notación convencional	Notación científica
a)	$0.056 + (-0.00043)$		
b)	13485628×5314298		
c)	532771×728667297		
d)	397×1954		
e)	45×32		
f)	$0.3 \div 1289$		

	Operación	Notación convencional	Notación científica
g)	$0.08 \div 0.00085$		
h)	$18 \div 198$		
i)	$0.4908 - 0.4855$		
j)	$.001 - .005$		
k)	$\sqrt{0.000004}$		
l)	0.000004^2		
m)	125000×208400		
n)	$-640000 \div .00002$		
o)	$1 \div 350$		
p)	0.03×0.0058		
q)	$235 \div 100000$		
r)	$-123 \div 456789$		
s)	$-999999 - 888888$		
t)	$2.2 \div 999.999$		
u)	99999×11111		

2.3. REDONDEO

Frecuentemente nos encontramos en la vida cotidiana con números que tienen muchas más cifras decimales de las que realmente necesitamos. Consideremos los siguientes ejemplos:

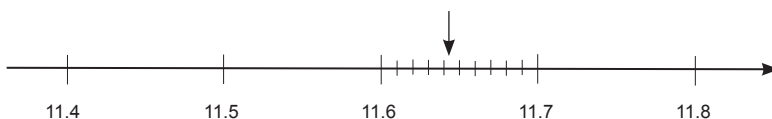
- Tenemos 57 tambos en los que queremos repartir 664 litros de aceite. ¿Cuánto quedará en cada tambo? Si hacemos la división, obtenemos $664 \div 57 = 11.649122817...$ Es decir, 11 litros, 6 decilitros, 4 centilitros, 9 mililitros, etc... Tal vez después de los decilitros ya no tiene ningún sentido seguir hablando de fracciones decimales cada vez más pequeñas.
- A una jardinera cuadrada de 1 m de lado queremos ponerle en la diagonal un enrejado para que crezca una enredadera. ¿Cuánto debe medir de largo el enrejado? La operación a efectuar es $\sqrt{2} = 1.414213562.....$ o sea 1 metro, 41 centímetros, 4 milímetros, etc... probablemente consideraríamos 1.41 m.

- En una cooperativa de 66 socios se obtuvo una ganancia de \$186,180. ¿Cuánto hay que entregarle a cada socio? La operación se puede expresar así: $\frac{186,180}{66} = 2,820.909090909...$ En este caso es obvio que la fracción de peso más pequeña de la que tendría sentido hablar son los centavos, pero incluso antes de eso, ¿no bastaría hablar de pesos enteros?
- Queremos repartir 2 kg de harina en 5 bolsas, de tal forma que todas tengan la misma cantidad. ¿Cuánto pesará cada una? La operación se puede expresar así: $\frac{2}{5} = 0.4$. Es decir, cada bolsa pesará 0.4 de kilo, o sea 400 gramos.

En el último de los cuatro ejemplos el resultado de la operación nos da una cantidad de cifras decimales que tiene sentido en la vida práctica: con la expresión 0.4 terminamos de enunciar el número (porque las demás cifras, si las queremos poner, son ceros: cero centésimos, cero milésimos...). Sin embargo, en los otros tres números obtenemos una cantidad de cifras decimales que no tiene sentido práctico. Debemos entonces cortar en algún lugar, y para hacerlo hay algunas reglas que se explican a continuación.

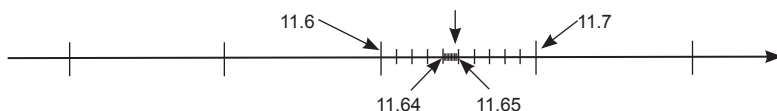
2.3.1. ¿Cómo redondear?

Supongamos que tenemos el número de nuestro primer ejemplo, y que lo llamamos **m**. Es decir, **m** = 11.649122817..., y supongamos que queremos encontrar el número, con *una sola cifra decimal*, que se aproxime más al número **m**. Si empezamos por ubicar el número **m** en la recta numérica, vemos que 11.649122817... está entre 11.6 y 11.7:



Si decimos que **m** es 11.6 *mentimos*, porque **m** es mayor que 11.6. Por otra parte, si decimos que **m** es 11.7 *también mentimos*, porque **m** es menor que 11.7. Pero ¿en cuál de los dos casos “*mentimos menos*”? Como se puede ver en la recta numérica, **m** está más cerca de 11.6 que de 11.7. Por lo tanto, el número con una cifra decimal más cercano a **m** es 11.6. Hacer esto tiene que ver con el hecho de que después del 6 sigue un 4, y 11.64 está más cerca de 11.60 que de 11.70. Escribimos entonces que $11.649122817... \approx 11.6$ (el símbolo $\approx$ se lee “aproximadamente igual a”), y decimos que hemos **redondeado m** a décimos o que hemos redondeado **m** a una cifra decimal.

Si ahora queremos encontrar el número con *dos cifras decimales más cercano a m*, nuevamente podemos ubicar a **m** en la recta numérica, y vemos que 11.649122817... está entre 11.64 y 11.65:



Es decir, si afirmamos que **m** es 11.64 *mentimos*, y también lo hacemos al considerar que es 11.65. Pero “*mentimos menos*” si decimos que es 11.65, porque 11.649122817... está más cerca de 11.65 que de 11.64. Esto es porque 11.649 está más cerca de 11.650 que de 11.640. Ahora escribimos $11.649122817... \approx 11.65$; hemos redondeado **m** a centésimos; también podemos decir que hemos redondeado **m** a dos cifras decimales.

Así, para expresar un número decimal que tiene más cifras decimales que las que nos interesan, a veces solo cortamos y a veces cortamos agregando 1. Para saber cuándo hay que realizar cada una de estas acciones se siguen estas reglas:

- ☞ Decidimos cuántas cifras decimales vamos a utilizar; digamos que se van a utilizar k cifras decimales.
- ☞ Nos fijamos en la cifra del lugar $k + 1$:
 - ☞ Si esa cifra es 0, 1, 2, 3 o 4, dejamos la cifra del lugar k como está.
 - ☞ Si esa cifra es 5, 6, 7, 8 o 9, a la cifra del lugar k le agregamos 1.

- Así, cuando decidimos redondear m a décimos ($k = 1$), tenemos que $11.649122817... \approx 11.6$, porque como en el 2.º lugar ($k + 1 = 2$) hay un 4, el 1.º lugar ($k = 1$: el de los décimos) se queda sin cambio: es 6.
- Cuando decidimos redondear m a centésimos ($k = 2$), tenemos que $11.649122817... \approx 11.65$, porque como en el 3.º lugar ($k + 1 = 3$) hay un 9, a la cifra que ocupa el 2.º lugar (el de los centésimos) se le aumenta 1: tenemos $4+1=5$. Es como si tuviéramos

$$\begin{array}{r} 11.64 \\ + \quad .01 \\ \hline 11.65 \end{array}$$

- Análogamente, si decidiéramos expresar m con milésimos tendríamos que $11.649122817... \approx 11.649$, y si decidiéramos expresarlo con diezmilésimos tendríamos que $11.649122817... \approx 11.6491$.

Veamos otro ejemplo de redondeo. Supongamos que queremos redondear el número

$$p = 29.99963$$

a tres cifras decimales. Como la cuarta es 6, a la tercera (9) le agregamos 1: es como si tuviéramos

$$\begin{array}{r}
 29.999 \\
 + \quad .001 \\
 \hline
 30.000
 \end{array}$$

y entonces tenemos $p \approx 30.000$

2.3.2. Algunas consideraciones acerca del redondeo

Redondeo de números negativos

Los números negativos se redondean con las mismas reglas que los positivos. Ejemplos:

- Si queremos redondear -67.0381 a una cifra decimal, obtenemos -67.0
- Si queremos redondear -1.891 a cero cifras decimales, obtenemos -2
- Si queremos redondear -1.825 a dos cifras decimales, obtenemos -1.83
- Si queremos redondear -466.9998351 a tres cifras decimales, obtenemos -467.000

Redondeo a decenas, centenas, millares...

Las reglas que hemos visto también se pueden aplicar a números grandes, ya sea enteros o no. Por ejemplo, según el INEGI, la población en México en el censo efectuado en 2020 fue de 126,014,024 personas. Claro, en el momento en que leas esto ya no será la misma, habrá habido nacimientos, muertes y migraciones. Por eso, ¿qué tanto importa que reportemos la población del país con el detalle de las unidades, las decenas y las centenas? Podemos redondear millares de personas: $126,014,024 \approx 126,014,000$. Observa que aquí sí rellenamos con ceros, porque como estamos a la izquierda del punto decimal, no es lo mismo 126,014 que 126,014,000. También podríamos redondear a millones: la población de nuestro país en 2020 era aproximadamente 126,000,000, es decir de 126 millones.

Truncar y redondear

En algunos contextos se manejan estos dos términos como sinónimos. Sin embargo, es necesario señalar la diferencia. Redondear es, como hemos visto, encontrar el número más cercano al valor real con la cantidad de cifras decimales deseadas, mientras que truncar es simplemente cortar la expresión. Veamos dos ejemplos en los que queremos expresar el resultado con una cifra decimal, y observemos cuánto dista el resultado del valor real, con cada uno de los dos procedimientos:

Cálculo	Valor real	Redondear		Truncar	
		resultado	error	resultado	error
1÷3	0.33333...	0.3	0.03333...	0.3	0.03333...
2÷3	0.66666...	0.7	0.03333...	0.6	0.06666...

Como vemos, en ambos procedimientos hay error, pero al truncar ese error no es nunca menor pero sí puede ser mayor que al redondear. Entonces, conviene no truncar sino redondear.

Uso de los símbolos $=$ y $\approx$

En la práctica, solo se usa el símbolo $\approx$ cuando queremos enfatizar que nuestro número no es exactamente igual al que escribimos. Si ese énfasis no es necesario, usamos el símbolo $=$. Así, si estamos redondeando a dos cifras decimales, escribimos expresiones como $m = 11.65$ y $p = 30.00$.

Redondeo de un número previamente redondeado

Consideremos el siguiente ejemplo:

- Redondeemos el número $s = 17.45$ a una cifra decimal: obtenemos $s \approx 17.5$. Si ahora quisiéramos redondear ese último número a enteros (es decir, a cero cifras decimales),

obtendríamos $s \approx 18$. Sin embargo, si redondeamos directamente $s = 17.45$ a enteros, obtenemos $s \approx 17$. Podemos entonces preguntarnos: ¿por fin, cuál es el entero más cercano a s , 17 o 18? La respuesta es 17, y el resultado $s \approx 18$ es un error surgido de que redondeamos un número que ya había sido el resultado de un redondeo.

Es por ello que conviene **evitar redondear números previamente redondeados**.

Cantidad de cifras utilizadas

¿Cuántas cifras decimales deben utilizarse para expresar el resultado de una operación? Esta pregunta no tiene una única respuesta, pero sí podemos dar dos recomendaciones generales:

- El número de cifras decimales debe tener un sentido en el contexto en el que se está trabajando.
- El número de cifras decimales debe estar relacionado con la precisión con la que se está trabajando o midiendo.

Pensemos, por ejemplo, que medimos el tiempo en el que una persona corre 100 metros. Si estamos hablando de atletas en competencia medimos el tiempo en segundos y centésimas de segundo: el récord es de 9.58 segundos; es decir, 9 segundos y 58 centésimas de segundo. En este contexto, cada centésima de segundo es importante y puede marcar la diferencia entre competidores o entre poseer el récord o no, pero, claro, solo podemos hablar de centésimas de segundo porque existen los instrumentos para medir esos tiempos tan pequeños. Por otra parte, si pensamos que una persona “común y corriente” se pone a correr 100 metros, probablemente haga un tiempo de unos 25 segundos. Ahora una centésima o una décima de segundo más o menos no tiene realmente ninguna relevancia (¡quizás incluso un segundo más o menos es irrelevante!).

A veces puede resultar importante señalar a cuántas cifras se está redondeando un número.

Un resultado puede expresar a cuántas cifras decimales es el redondeo

Anteriormente vimos que para redondear el número **$p = 29.99963$** a tres cifras decimales, es como si tuviéramos

$$\begin{array}{r} 29.999 \\ + \quad .001 \\ \hline 30.000 \end{array}$$

y entonces tenemos $29.99963 \approx 30.000$

Ahora redondearemos los números **$p = 29.99963$** , **$q = 29.99511$** y **$r = 29.91444$** a una, dos y tres cifras decimales:

	Redondeo...		
	...a décimos	...a centésimos	...a milésimos
$p = 29.99963 \approx$	30.0	30.00	30.000
$q = 29.99511 \approx$	30.0	30.00	29.995
$r = 29.91444 \approx$	30.0	29.91	29.914

Como se puede ver, si nos fijamos en los décimos los tres números **p** , **q** y **r** quedan expresados como 30.0. Si nos fijamos en los centésimos, **p** y **q** quedan expresados como 30.00, pero **r** queda expresado de una manera distinta: 29.91. Al fijarnos en los milésimos, los tres números quedan expresados de manera distinta: **$p \approx 30.000$** , **$q \approx 29.995$** y **$r \approx 29.914$** .

Es por esta razón que, aunque formalmente ya hemos visto que $30.000 = 30.00 = 30.0 = 30$, conviene expresar los números como lo hicimos en la tabla de arriba, porque así denotamos a cuántas cifras hemos hecho el

redondeo. Cuando decimos que $p \approx 30.000$ estamos diciendo que la distancia entre p y 30 es menor que 0.001

Observa que esta situación es distinta que la que se presenta con los números decimales que tienen nueve periódico, de los que hablamos en el capítulo 1, porque ninguno de estos tres números tiene una lista infinita de nueves.

2.3.3. Sentido práctico del redondeo

Hasta ahora hemos estado viendo el redondeo como la búsqueda del número más cercano a uno que tenemos (frecuentemente como resultado de una operación), cuando sabemos cuántas cifras queremos considerar. Sin embargo, en la vida cotidiana también necesitamos que el resultado tenga sentido práctico en el contexto real en el que estamos trabajando, y para ello puede ocurrir que sea necesario hacer ajustes, según el contexto. De hecho, es una situación muy parecida a la que ya habíamos considerado cuando hablamos de ajustar los resultados de ciertas operaciones para que tengan sentido en la vida práctica.

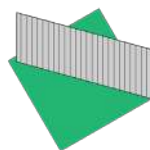
Para entenderlo mejor, retomaremos los cuatro ejemplos con los que empezamos a abordar el redondeo, pero le daremos prioridad al aspecto del sentido práctico.

- *Tenemos 57 tambo en los que queremos repartir 664 litros de aceite. ¿Cuánto quedará en cada tambo?*

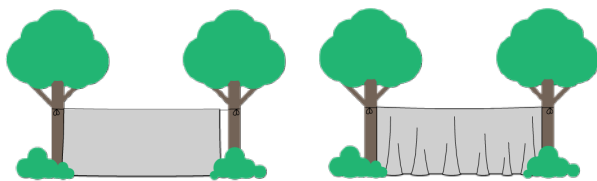
Como vimos, lo que tendríamos que poner en cada tambo es 11.649122817... litros. Si decidimos redondear a décimos, tenemos 11.6 litros, o sea 11 litros y 6 decilitros. Sin embargo, al verter 11.6 litros en cada uno de los 57 tambo, habremos repartido $11.6 \times 57 = 661.2$ litros, y por lo tanto quedarán $664 - 661.2 = 2.8$ litros sin repartir. ¿Qué ocurre con esos 2.8 litros? Aquí podemos adoptar varias soluciones. Una de ellas es repartir esos 2.8 litros en 28 raciones de 1 decilitro, y así

verter 11.7 litros en 28 de los tambos y 11.6 en los 29 restantes. Otra solución es tener un tambo de $11.6 + 2.8 = 14.4$ litros y los restantes 56 tambos de 11.6 litros. Otra solución es darle un uso distinto a los 2.8 litros restantes, y seguramente podríamos encontrar aún más soluciones. También debemos tener en cuenta de qué estamos hablando: no es lo mismo que sobren 2.8 litros de aceite, a que esos 2.8 litros sean de un perfume fino.

- *A una jardinera cuadrada de 1 m de lado que-remos ponerle en la diagonal un enrejado para que crezca una enredadera. ¿Cuánto debe medir de largo el enrejado?*



Como vimos, el enrejado debería medir 1.414213562... metros de largo, y si una precisión de centímetros es conveniente, eso se convierte en 1.41 metros, es decir que el enrejado va a medir un poquitito menos que el espacio en el que se va a colocar: ¡nada grave! (¡Y sí sería grave que nos quedara un enrejado más largo que el espacio en el que debe caber!). Pensemos ahora que queremos comprar tela para cubrir enteramente un espacio con esa misma medida de 1.414213562... metros entre dos árboles: si compramos 1.41 metros nos va a faltar tela y no vamos a poder cubrir enteramente el espacio; ahora



nos conviene comprar más tela, 1.42 me-tros ¡o incluso más!

- *En una cooperativa de 66 socios se obtuvo una ganancia de \$186,180. ¿Cuánto hay que entregarle a cada socio?*

Como vimos anteriormente, habría que entregar \$2,820.909090909... a cada socio; digamos que redondeamos a pesos: \$2,821 a cada socio. Pero entonces hay que entregar en total $2,821 \times 66 = \$186,186$, es decir 6 pesos más de lo que hay en la caja: ¿de dónde van a salir esos 6 pesos que faltan?

También aquí podemos pensar en varias soluciones. Una es entregar \$2,820 a cada socio, y entonces solamente repartir $\$2,820 \times 66 = \$186,120$, es decir \$60 menos de la cantidad existente, y dejar en la caja común esos \$60. Otra solución es afinar el redondeo hasta los centavos, y procurar entregar un cheque por \$2,820.91 a cada socio; entonces se entregarían $2,820.91 \times 66 = \$186,180.06$, y el faltante sería solamente de 6 centavos, que tal vez la caja pueda cubrir. O entregar \$2,820.90 a cada socio, o sea repartir $2,820.90 \times 66 = \$186,179.40$, y dejar en la caja común los 60 centavos restantes.

- *Queremos repartir 2 kg de harina en 5 bolsas, de tal forma que todas tengan la misma cantidad. ¿Cuánto pesará cada una?*
Como vimos, cada bolsa pesará 0.4 de kilo y dijimos que eso era lo mismo que 400 gramos. Observa que aunque el resultado era 0.4, como lo usual es hablar de las fracciones de kilo en gramos (que son milésimas de kilo), si queremos expresar el resultado en kilos, lo hacemos así: 0.400 kg.

Finalmente, veamos un par de casos en los que la palabra “redondeo” se usa en un sentido ligeramente distinto a como lo hemos estado manejando:

- *El “redondeo” en el supermercado.*
Desde hace tiempo se acostumbra en México que los supermercados hagan campañas de “redondeo” para alguna causa filantrópica. Ahí, si nuestra cuenta fue de \$236.15 el cajero nos preguntará si queremos “redondear” y si accedemos nos cobrarán \$237.00 y los 85 centavos restantes, según nos informan, se destinarán a la causa filantrópica. Aquí por “redondeo” se entiende subir la cuenta al siguiente número entero (y no al más cercano).
- *El “redondeo” en algunas cuentas de servicios.*
En algunos recibos también aparece la palabra “redondeo”, pero en otro sentido más. Si la cuenta es de \$327.81, aparece un “crédito por redondeo” de \$0.81 y solamente cobran \$327.

Pero ¡eso no significa que la compañía nos esté regalando los 81 centavos! El siguiente mes, si la nueva cuenta fue de \$214.57, agregan los 81 centavos y ahora la cuenta queda en \$215.38. Pagamos \$215 y nuevamente tenemos un “crédito por redondeo” de \$0.38, y así sucesivamente... Es decir, en este sentido “redondeo” es bajar al número entero inmediatamente inferior (y no al más cercano). De hecho, lo que hace la compañía es truncar a enteros, pero no corta los decimales sino que los va acumulando.

En resumen, el redondeo nos da como resultado el número más cercano a otro que tenemos con la cantidad de cifras decimales que deseemos, pero siempre hay que considerar, en el contexto del problema que estamos resolviendo, qué es lo más práctico y cómo están considerando el “redondeo” las personas con las que tenemos interacción.

EJERCICIOS

Recuerda que los ejercicios con numeración par son similares a los que los preceden. Haz solamente aquellos que consideres necesarios para tu proceso de aprendizaje.

2.21. En cada uno de los siguientes ejercicios, redondea los números que se dan a la cantidad de cifras decimales que se indica.

a) A una cifra decimal (décimos)

- i) 1.154 ii) -1.9999 iii) π

b) A dos cifras decimales (centésimos)

- i) -1.154 ii) 14.907635 iii) π

c) A tres cifras decimales (milésimos)

- i) 1.359999 ii) -100.2432 iii) π

d) A cuatro cifras decimales (diezmilésimos)

- i) 1.15479 ii) -0.089754 iii) π

2.22. En cada uno de los siguientes ejercicios, redondea los números que se dan a la cantidad de cifras decimales que se indica.

a) A tres cifras decimales (milésimos)

- | | | |
|-----------------|-----------------|------------------|
| i) 12.0983 | iv) 476.876254 | vii) -234.675467 |
| ii) -5.4545 | v) 0.2857142857 | viii) 4.567894 |
| iii) -0.5999999 | vi) 88.88888 | ix) 0.025 |

b) A una cifra decimal (décimos)

- | | | |
|---------------|------------|---------------|
| i) 18.06 | iv) 7.7777 | vii) 307.650 |
| ii) -100.2432 | v) 25.256 | viii) 0.99756 |
| iii) 12.098 | vi) -6.789 | ix) 0.025 |

c) A cuatro cifras decimales (diezmilésimos)

- | | | |
|-----------------|----------------|-----------------|
| i) 12.098567 | iv) 9.87654321 | vii) 0.003765 |
| ii) -5.454545 | v) 1.09080706 | viii) 19.283754 |
| iii) .039999999 | vi) 14.00001 | ix) 0.025 |

d) A dos cifras decimales (centésimos)

- | | | |
|--------------|------------|----------------|
| i) -100.2432 | iv) 7.7777 | vii) 7.5432 |
| ii) 12.098 | v) 25.256 | viii) 0.333333 |
| iii) -1.327 | vi) -6.789 | ix) 0.025 |

2.23. Resuelve con tu calculadora las siguientes operaciones y expresa los resultados con tres cifras decimales (hasta milésimos).

- | | |
|----------------------|---------------------------|
| a) $5.87 \div 13.24$ | d) $\sqrt{5}$ |
| b) 0.26^2 | e) $12^2 \div 25$ |
| c) $\sqrt{162.5972}$ | f) 7.876×10^{-2} |

2.24. Resuelve con tu calculadora las siguientes operaciones y expresa los resultados con tres cifras decimales (hasta milésimos)

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| a) $100.356 / 246.35$ | l) 6.318×45.27 |
| b) $-(123.56 \div 9)^2$ | m) $6^{-3} \div 8^{-4}$ |
| c) 0.8^3 | n) $2 - 1.84576$ |
| d) $\sqrt[3]{0.8}$ | o) 0.888×0.999 |
| e) $0.2^3 \times 0.3^2$ | p) $(-3.48)^4$ |
| f) $(-1.56)^4(-3.75)^3$ | q) 1.5^{-5} |
| g) $2.4/3.5$ | r) $1/7$ |
| h) $\frac{1}{4} - 2/7$ | s) $65 \div 98$ |
| i) 0.12×0.25 | t) $(1.475)^3$ |
| j) 9.99999×2 | u) $\sqrt{.001}$ |
| k) $\sqrt{345}$ | |

2.25. En cada uno de los siguientes ejercicios, redondea los números como se indica.

- | | | |
|---------------|------------|--------------|
| a) A decenas | | |
| i) 9876543 | ii) 2355 | iii) 99 |
| b) A centenas | | |
| i) 9876543 | ii) 682 | iii) 100 |
| c) A millares | | |
| i) 9876543 | ii) 539999 | iii) 983 |
| d) A millones | | |
| i) 9876543 | ii) 231806 | iii) 3578804 |

2.26. En cada uno de los siguientes ejercicios, redondea los números como se indica.

- | | |
|---------------|-----------|
| a) A centenas | |
| i) 17 | iv) 985 |
| ii) 568300 | v) -45670 |
| iii) 5430024 | vi) -111 |

b) A millares

- | | |
|-------------|-----------|
| i) 17 | iv) 875 |
| ii) 8433610 | v) -45670 |
| iii) 445566 | vi) -901 |

c) A decenas

- | | |
|-----------|-------------|
| i) 561102 | iv) 5678001 |
| ii) 8 | v) -8712 |
| iii) 4 | vi) -6 |

d) A millones

- | | |
|-----------------|-------------------|
| i) 534422670012 | iv) 968124 |
| ii) 51335422411 | v) -63241 |
| iii) 568124 | vi) -897664312004 |

2.27. En los siguientes incisos, indica a cuántas unidades equivalen las cantidades señaladas:

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| a) 3.2 unidades de millar | d) 6.437 miles |
| b) 5.8 decenas | e) 1.15 centenas |
| c) 0.31 millones | f) 0.17 decenas de millón |

2.28. En los siguientes incisos, indica a cuántas unidades equivalen las cantidades señaladas:

- | | |
|-----------------------------|------------------|
| a) 89071 unidades de millar | d) 56 centenas |
| b) 538 decenas de millar | e) 0.1 decenas |
| c) 0.34 centenas de millar | f) 2301 millones |

2.29. Resuelve los siguientes problemas y expresa el resultado de modo que tenga sentido en el contexto de la situación planteada.

- a) En un sector escolar se pretende instaurar un programa para dar desayunos escolares a los 18,521 alumnos de primaria durante 200 días. En agosto se calcula el costo de cada

desayuno en \$23.51, aunque se teme que por la inflación ese precio pueda subir. ¿Aproximadamente qué presupuesto requiere el programa?

- b) Chuy debe amarrar varias cajas que miden 85 cm x 30 cm x 30 cm, como se ilustra en la figura. Si calcula aproximadamente 30 cm de nudos y lazadas para cada caja, ¿para cuántas cajas le alcanzan los 65 metros de cuerda que tiene?



2.30. Resuelve los siguientes problemas y expresa el resultado de modo que tenga sentido en el contexto de la situación planteada.

- a) Doña Lupe hornea pasteles de elote que vende por rebanadas. Considerando el costo de producción y las ganancias correspondientes, ella calcula que debe recibir \$90 por pastel. Si de cada uno corta 8 rebanadas, ¿cuál es el precio mínimo que debe cobrar por rebanada?
- b) ¿Cuánta tira de encaje hay que comprar para adornar el borde de 27 cajas cilíndricas de 7.5 cm de radio? (**Nota:** La circunferencia se calcula como $2\pi r$, donde r es el radio).
- c) Tere tiene una papelería. Compró 45 cuadernos a \$27.55 cada uno. Con la ganancia de la venta de estos cuadernos pretende comprar una caja de lápices de \$180 y un paquete de tijeras de \$98.30. ¿A cuánto debe vender cada cuaderno?

2.4. MEDICIÓN

Finalizaremos este capítulo hablando de medición, porque muchos de los usos de los números en la vida diaria tienen que ver con medir diversas cualidades de objetos o procesos: medir longitudes, áreas, pesos, tiempos, etc.; incluso se puede pensar, cuando hablamos de dinero, que estamos midiendo algo (el valor monetario

del objeto). Empezaremos haciendo algunas reflexiones generales sobre la medición y, posteriormente, veremos aspectos operativos acerca de las unidades de medida y las conversiones entre ellas.

2.4.1. El proceso de medición

En general, cuando se va a hacer una medición es necesario considerar dos elementos: la elección de la unidad con la que se va a medir y el nivel de precisión que se requiere. A su vez, la elección de la unidad tiene que ver fundamentalmente con dos aspectos: el sistema de referencia y, dentro de este, cuál es la unidad más “cómoda”, de tal manera que el resultado sea fácilmente comprensible dentro del contexto.

Pensemos, por ejemplo, en la medición de longitudes. Lo más común en la actualidad es usar algunas de las unidades del Sistema Internacional (SI) de medidas: por ejemplo, kilómetros para las distancias entre dos ciudades o entre partes distantes de ciudades grandes, metros para las longitudes que son comparables a la estatura de una persona, centímetros y milímetros para objetos menores. Aunque sea cierto, sería sumamente absurdo decir cosas como: “la estatura de una de nosotras es 0.00176 km”, o “la distancia entre México y Cuernavaca es de 80,000,000 mm”. ¿Y qué tal esto: “la distancia de la Luna a la Tierra es de 384,403,000,000,000 μm : más de 384 billones de micras”? La manera más cómoda de expresar estas cantidades es, respectivamente, 1.76 m, 80 km y 384,403 km.

¿Con qué precisión medimos una longitud? Pensemos, por ejemplo, que queremos saber cuánto mide de largo el objeto que se ilustra en la siguiente figura.



Colocamos la regla alineando el 0 con el borde del objeto, y luego vemos que el otro borde “casi” coincide con la marca de 16 cm. Podemos decir que el objeto mide 16 cm de largo, aunque si queremos mayor precisión, vemos que en realidad no son 16 cm sino algo menos: aproximadamente 15 cm y 8 milímetros, es decir, 15.8 cm. ¿Qué medida es la correcta? Pues ambas lo son, pero todo depende de para qué deseamos esa medición: si se trata de adornar una repisa, probablemente 16 cm sea más que suficiente; si se trata de acomodar el objeto en otro de medidas muy similares, probablemente tengamos que utilizar los 15.8 o 15.9 cm. Si quisiéramos más precisión que la del milímetro tendríamos que recurrir a otros instrumentos. Además, es necesario tener en cuenta que también hay errores que quizá estemos cometiendo al medir: tal vez el borde no está exactamente alineado con el 0, puede ser que en nuestra regla los milímetros en realidad distan entre sí un poquitito más o un poquitito menos de un milímetro. Por todas estas razones sería absurdo, después de una medición hecha como en la imagen, pretender que el objeto mide 15.843705432169942541 cm o algo así... cualquiera podría preguntar cómo le hicimos para llegar a ese nivel de “precisión” ¡¡¡hasta de una trillonésima de centímetro!!!!

Otro aspecto que tiene que ver con la precisión en la medición de una longitud es que las longitudes que medimos pueden tener variaciones; por ejemplo, al medir la distancia entre dos ciudades tendríamos que aclarar si es “a vuelo de pájaro” o por carretera (y si

hay varias, cuál de ellas), los puntos de salida y de llegada, etc. Además, los objetos mismos que medimos pueden cambiar. La distancia de 384,403 km entre la Tierra y la Luna es en realidad un promedio, ya que la órbita de la Luna alrededor de la Tierra no es un círculo sino una elipse; hay de hecho una variación de más de 40,000 km entre el punto más lejano y el más cercano a la Tierra de la órbita lunar. Algo similar ocurriría si queremos medir el diámetro de una amiba viva: podemos decir que mide unas 250 μm , pero si se mueve la amiba esta longitud puede cambiar. Dadas estas variaciones, sería absurdo decir que la distancia entre la Tierra y la Luna es de 384,403.4398746 km, o que una amiba mide 251.4872709 μm .

Como tal vez observaste, la precisión de la medida es un proceso similar al de redondeo que vimos en la sección anterior, y está sujeta a consideraciones muy parecidas.

Pensemos ahora en la medición de la capacidad en un ámbito cotidiano: la cocina. En las recetas de cocina se habla de tazas, cucharadas, cucharaditas y gotas; seguramente habrás visto algún juego de tazas y cucharas para medir con 1 taza y algunas de sus fracciones: $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, etc., y lo mismo con las cucharas y las cucharitas, hasta $\frac{1}{8}$ de cucharadita. En general no se especifica de qué tamaño son estos utensilios, porque no es necesario llegar a una precisión extrema, o porque la precisión está dentro del sistema mismo. Por ejemplo, cuando se prepara arroz con la receta de “dos tazas de agua por cada taza de arroz” no importa de qué tamaño es la taza, porque se da por sentado que se usa la misma taza para medir el arroz y el agua. O cuando se habla de recetas en las que un poco más o un poco menos no importan, se prescinde también de mencionar el tamaño de la taza, la cuchara o la cucharita. Cuando la precisión es indispensable, lo que puede ocurrir en recetas en las que un poco más o menos sí importe, o en las que se combinen tazas y cucharas con otras unidades, como “250 gramos de mantequilla”, se dice que 1 taza son 250 ml, 1 cucharada son 15 ml y una cucharadita son 5 ml. En cuanto a las “gotas”, dentro del ámbito de las recetas de cocina son tan ambiguas como, hablando de masas, las “pizcas”,

los “poquitos” o las “puntas de un cuchillo”. Muchos de nosotros hemos sido (o conocemos a alguien que lo ha sido) el novato en la cocina que al leer una receta que mencione unas gotas de algún ingrediente, piense: “gotas, sí, pero ¿de qué gotero?”.

Justamente las gotas nos dan pie a hablar de precisión: cuando se trata de recetas de cocina, la ambigüedad y la imprecisión no son un inconveniente, sino que abren un margen para el “toque personal”: habrá un cocinero que le agregue un poco más o un poco menos de determinado ingrediente y le imprima así un sello propio, una especie de firma. Pensemos, por otra parte, en un medicamento que requiere administrarse en cierta cantidad de gotas. Ahora la imprecisión podría llegar a tener repercusiones graves: dependiendo del gotero, las “gotas” podrían resultar en dosis peligrosamente excesivas o insuficientes del medicamento y, para evitar esto, la compañía farmacéutica provee el gotero adecuado junto con el frasco del medicamento: “gotas, sí, pero justamente de este gotero”.

Algo similar se podría decir de, por ejemplo, las medidas de masa. Para hablar de precisión podemos, de nuevo, comparar los ámbitos de la cocina y la farmacia: si estamos preparando una receta de cocina, agregar 250 gramos de mantequilla o 251 o 260, realmente no tiene un gran efecto en el resultado final. En cambio, un miligramo más o menos en una fórmula farmacéutica sí puede resultar muy importante. La precisión es muchísimo más importante en el ámbito de la farmacia que en el de la cocina.

El sistema de referencia no solo considera las unidades, sino también la manera en la que estas se subdividen. Cuando se habla del Sistema Internacional de medidas, las subunidades –según veremos enseguida– van de diez en diez, lo que las vuelve sumamente prácticas al hacer cambios de unidades. Sin embargo, en la vida cotidiana también usamos fracciones comunes para dividir las unidades, sobre todo medios y cuartos, como se hace en otros sistemas de referencia, entre ellos el de uso común en EEUU. Aunque estemos utilizando metros, litros y kilos, no por eso dejamos de hablar de “medio metro de tela”, “un cuarto de kilo de queso” (o incluso “un cuarto de

queso”), “medio cuarto de kilo de jamón”, o hasta de “tres medios litros”. Lo importante es que sea una subdivisión fácil de efectuar, comprensible para nuestros interlocutores y de uso práctico.

También es conveniente considerar que los sistemas de referencia para la medición son una parte intrínseca de cada cultura. Muchos de los pueblos indígenas mexicanos tienen maneras propias de medir las longitudes, áreas, pesos, etc.; por ejemplo, es usual medir las áreas de terrenos de cultivo con “jícaras”; tal vez te preguntarás qué tiene que ver un recipiente con un terreno, y la respuesta es que si llenas una jícara con granos de maíz, y siembras de la manera tradicional con una determinada cantidad de granos cada paso en surcos colocados a distancias determinadas, la cantidad de granos de maíz que caben en una jícara establece con bastante precisión la superficie del terreno que se está sembrando.

2.4.2. Sistema Internacional de unidades (SI)

Como sabes, frecuentemente las unidades de medición están agrupadas en unidades mayores o tienen subunidades. Poder pasar de unas a otras es importante porque, como hemos señalado, siempre procuramos usar una unidad que resulte conveniente y cómoda.

El Sistema Internacional de unidades –también llamado Sistema Internacional de medidas o SI– es un sistema de medición de longitudes, áreas, volúmenes, capacidades, masas y otras características físicas de los objetos. Es el nombre que recibe actualmente el Sistema Métrico Decimal (SMD), diseñado a finales del siglo XVIII con el doble objetivo de establecer un mecanismo común para pasar de unidades a subunidades (y viceversa) de una manera que fuera aritméticamente sencilla, y de relacionar entre sí las distintas unidades. El funcionamiento básico del SI se describe a continuación.*

* En la actualidad el SI es usado en todos los países, con la excepción de tres (Estados Unidos de América, Liberia y Birmania).

- Para cada característica (la longitud, la masa, etc.) se define una unidad básica y, a partir de ahí, unidades más grandes que son múltiplos de 10 de la básica:
 - 10 veces la unidad básica se llama deca- (da)
 - 100 veces la unidad básica se llama hecto- (h)
 - 1,000 veces la unidad básica se llama kilo- (k)y unidades más pequeñas que son submúltiplos de 10 de la básica:
 - 0.1 de la unidad básica se llama deci- (d)
 - 0.01 de la unidad básica se llama centi- (c)
 - 0.001 de la unidad básica se llama mili- (m)
 - 0.000001 de la unidad básica se llama micro- (μ)

Nota: Como se verá más adelante, algunas de estas unidades no se usan en la práctica, pero es útil tenerlas en cuenta para las conversiones.
- El metro es la unidad básica de longitud. A partir del metro se definen unidades para otras características:
 - Para medir áreas se usa el metro cuadrado (m^2), que es el área de un cuadrado de 1m de lado
 - Para medir volúmenes se usa el metro cúbico (m^3), que es el volumen de un cubo de 1m de arista
 - Para medir capacidades la unidad básica es el litro (l), que es lo que cabe dentro de un dm^3 ,
 - Para medir masas se usan el gramo (g) y el kilogramo (kg); este último se define como la masa de un litro de agua.

Así tenemos, en cuanto a las unidades de longitud, que un kilómetro es igual a 10 hectómetros o a 1,000 metros, etc.; un metro es igual a 0.001 kilómetros, o a 100 centímetros, etc. Podemos entonces escribir las equivalencias de cada medida así:

1 km =	10 hm =	100 dam =	1,000 m =	10,000 dm =	100,000 cm =	1,000,000 mm
0.1 km =	1 hm =	10 dam =	100 m =	1,000 dm =	10,000 cm =	100,000 mm
0.01 km =	0.1 hm =	1 dam =	10 m =	100 dm =	1,000 cm =	10,000 mm
0.001 km =	0.01 hm =	0.1 dam =	1 m =	10 dm =	100 cm =	1,000 mm
0.0001 km =	0.001 hm =	0.01 dam =	0.1 m =	1 dm =	10 cm =	100 mm
0.00001 km =	0.0001 hm =	0.001 dam =	0.01 m =	0.1 dm =	1 cm =	10 mm
0.000001 km =	0.00001 hm =	0.0001 dam =	0.001 m =	0.01 dm =	0.1 cm =	1 mm

Observa que hemos marcado con sombreado violeta cuántos metros (o fracción de metro) son equivalentes a cada una de las medidas. Otra manera de expresar lo anterior es usando las potencias de 10 (con exponentes positivos y negativos, como los que se mencionaron en la página 138):

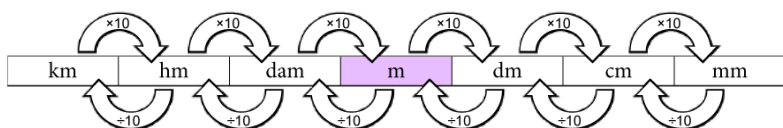
1 km =	10^1 hm =	10^2 dam =	10^3 m =	10^4 dm =	10^5 cm =	10^6 mm
10^{-1} km =	1 hm =	10^1 dam =	10^2 m =	10^3 dm =	10^4 cm =	10^5 mm
10^{-2} km =	10^{-1} hm =	1 dam =	10^1 m =	10^2 dm =	10^3 cm =	10^4 mm
10^{-3} km =	10^{-2} hm =	10^{-1} dam =	1 m =	10^1 dm =	10^2 cm =	10^3 mm
10^{-4} km =	10^{-3} hm =	10^{-2} dam =	10^{-1} m =	1 dm =	10^1 cm =	10^2 mm
10^{-5} km =	10^{-4} hm =	10^{-3} dam =	10^{-2} m =	10^{-1} dm =	1 cm =	10^1 mm
10^{-6} km =	10^{-5} hm =	10^{-4} dam =	10^{-3} m =	10^{-2} dm =	10^{-1} cm =	1 mm

Una tabla como las anteriores nos puede servir para saber cómo pasar de una unidad a otra.

- Si queremos convertir algo expresado en cierta unidad a unidades *menores*, *multiplicamos* por una potencia de diez. Por ejemplo:
 - Para pasar de km a m multiplicamos por 10^3 . Es decir, corremos el punto decimal 3 lugares *a la derecha*. Así, $1.25 \text{ km} = 1250 \text{ m}$, y $10 \text{ km} = 10000 \text{ m}$
 - Para pasar de m a cm multiplicamos por 10^2 , como en $0.7 \text{ m} = 70 \text{ cm}$

- Si queremos convertir algo expresado en cierta unidad a unidades *mayores*, *dividimos* entre una potencia de diez. Por ejemplo:
 - Para pasar de mm a m dividimos entre 10^3 . Es decir, corremos el punto decimal 3 lugares *a la izquierda*. Así, $15.42 \text{ mm} = 0.01542 \text{ m}$ y $186374 \text{ mm} = 186.374 \text{ m}$
 - Para pasar de cm a km dividimos entre 10^5 , como en $567802 \text{ cm} = 5.67802 \text{ km}$

Estas conversiones se pueden entonces esquematizar así:



Como dijimos, en la práctica no se utilizan todas las unidades. Para hablar de longitudes, por ejemplo, los decámetros y los hectómetros prácticamente no se utilizan: no se diría que una habitación mide un decámetro de largo, sino 10 metros. Pero tener en cuenta que existen nos permite recordar por cuál potencia de diez hay que multiplicar o dividir para pasar de una unidad a otra.

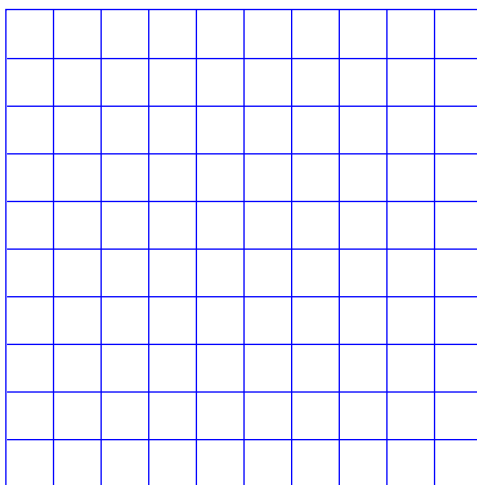
Las conversiones entre litros y decalitros, hectolitros, etc., o decilitros, centilitros, etc. se hacen de manera análoga a las conversiones entre las unidades de longitud que acabamos de ver. Pero como por definición el litro está relacionado con las unidades de volumen, también es usual hablar de metros cúbicos: por ejemplo, no se suele decir que la cantidad de agua en un tinaco sea un kilolitro (1 kl) sino 1 m^3 , aunque sean equivalentes.

Algo similar ocurre con las conversiones entre gramos, kilogramos, miligramos, etc., con la salvedad de que ahí hay otra unidad: la tonelada, que es equivalente a 1,000 kilogramos.

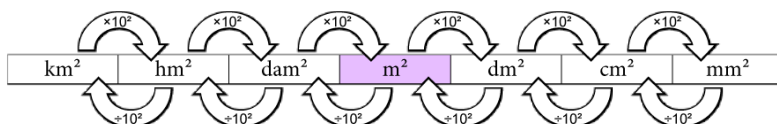
Sin embargo, las conversiones entre unidades de área o entre unidades de volumen no se comportan así. Veamos qué ocurre con las unidades de área. Si pensamos en longitudes, en un decímetro

hay diez centímetros.

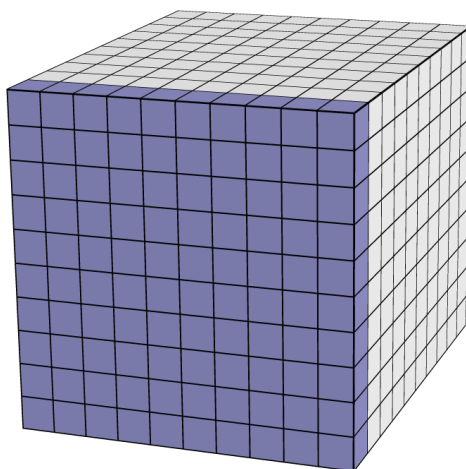
Pero ¿cuántos centímetros cuadrados hay en un decímetro cuadrado? Un decímetro cuadrado (1 dm^2) es el área de un cuadrado que mide un decímetro de lado, es decir, el área del cuadrado que hemos puesto a la derecha; si cada uno de los cuadritos mide 1 cm de



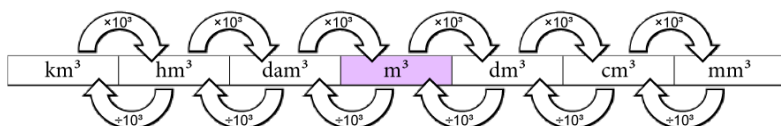
lado, cada cuadrito tiene de área 1 cm^2 , y entonces hay ¡100 cm^2 en un dm^2 ! Esto es, las conversiones entre unidades de área no van de 10 en 10, sino de 100 en 100, es decir, de 10^2 en 10^2 . Esquemáticamente, ahora tenemos:



Y si ahora pensamos en volúmenes, un dm^3 es el volumen de un cubo que mide 1 dm de lado. Cada una de las caras de ese cubo es como el cuadrado de arriba. En la primera capa de cubitos, iluminada en color morado, hay 100 cubitos de 1 cm de lado, o sea de 1 cm^3 . Como en el cubo



hay diez capas de estas, caben diez veces 100 cubitos de 1 cm de lado, es decir, diez veces 100 cubitos de 1 cm³, o sea 1,000 cubitos de 1 cm³. Entonces, las conversiones entre unidades de volumen van de 1,000 en 1,000, es decir de 10^3 en 10^3 . Esquemáticamente, ahora tenemos:



Los esquemas anteriores nos pueden ayudar a resolver preguntas como estas:

- La República Mexicana tiene una superficie de 1,964,375 km². ¿Cuántas hectáreas son? Como una hectárea (ha) es lo mismo que un hectómetro cuadrado, para pasar de km² a hectáreas multiplicamos por 10^2 , es decir, por 100. México tiene 196,437,500 ha: casi 200 millones de hectáreas.
- ¿Cuántos litros de agua caben en una pipa de 10 metros cúbicos? Aquí tenemos en juego una unidad de capacidad (litro) y una unidad de volumen (metro cúbico). Como un litro es lo que cabe en un decímetro cúbico, lo que queremos saber es cuántos decímetros cúbicos hay en 10 metros cúbicos: y los que hay son $10 \times 10^3 = 10^4$. Es decir, en una pipa de 10 metros cúbicos caben diez mil litros de agua.

El Sistema Internacional de unidades permite entonces pasar de una unidad a otra con cálculos muy sencillos. Esto no es tan fácil en otros sistemas; por ejemplo, en Estados Unidos de América se usan –entre otras unidades de longitud– la milla, la yarda, el pie y la pulgada, pero una milla son 17,600 yardas, una yarda son 3 pies y un pie son 12 pulgadas.

2.4.3. Algunas medidas que no están en el SI

Aunque el Sistema Internacional (SI) de medidas sea el sistema de referencia más usual, en algunos ámbitos se utilizan otras unidades, ya sea por razones de tradición gremial o de intercambios culturales o económicos.

Aquí veremos algunas unidades de medida que se utilizan en México, pero que no son parte del Sistema Internacional de medidas. En la actualidad es en Estados Unidos de América donde se sigue usando la mayoría de ellas. Al final de este apartado se mencionarán, también, las unidades utilizadas para medir la memoria en las computadoras.

Sistema estadounidense

En EEUU no se usa el Sistema Internacional de medidas sino otras unidades; algunas de ellas se utilizaban en nuestro país antes de la creación del SMD y encontramos todavía algunos remanentes en diversos usos. El sistema tiene varias peculiaridades, entre las que cabe mencionar las siguientes:

- las medidas de capacidad difieren según se esté midiendo sustancias líquidas o áridas (como granos de cereal);
- hay unidades que reciben el mismo nombre, pero se refieren a magnitudes diferentes, por ejemplo: onza, cuarto, pinta;
- no todas las medidas utilizadas en EEUU son iguales a las utilizadas en el imperio británico con anterioridad;
- el factor de conversión de cierta unidad a una más pequeña no es necesariamente el mismo, aunque se esté hablando de la misma magnitud. Por ejemplo, en EEUU hay las siguientes unidades de longitud:
 - Una milla son 80 furlongs
 - Un furlong son 40 rods

- Un rod son 5 ½ yardas
- Una yarda son 3 pies
- Un pie son 12 pulgadas
- Una pulgada es lo que mide (aproximadamente) un pulgar
- (Las unidades más pequeñas son la subdivisión de una pulgada en medios, cuartos, octavos, etc.)

La siguiente tabla te podrá servir de referencia en caso necesario.

Magnitud	Unidad	Abreviación	Equivalencia aprox. en el SI
Longitud	pulgada	in	2.54 cm
	pie	ft	30.48 cm
	yarda	yd	0.9 m
	milla	mi	1.609 km
Superficie	yarda cuadrada	sq yd	0.84 m ²
	acre	ac	0.405 ha
Volumen	yarda cúbica	cu yd	0.76 m ³
Capacidad para líquidos	onza	fl oz	29.6 ml
	pinta	pt	0.473 l
	cuarto	qt	0.946 l
	galón	gal	3.8 l
	barril		159 l
Capacidad para áridos	pinta	pt	0.55 l
	cuarto	qt	1.1 l
	galón	gal	4.4 l
	bushel	bu	35.2 l

Magnitud	Unidad	Abreviación	Equivalencia aprox. en el SI
Masa o peso	onza	oz	28.35 g
	cuarto	qtr	11.34 kg
	libra	lb	454 g
	stone	st	6.35 kg

Longitudes

- En algunos oficios (plomería, mecánica, sastrería, carpintería...) se usan la pulgada y sus fracciones; por ejemplo, se habla de una llave de $\frac{5}{8}$ o de un tablón de $\frac{3}{4}$, medidas que se refieren a cinco octavos o tres cuartos de pulgada. También suele utilizarse las comillas como símbolo de pulgadas: un tablón de $\frac{3}{4}$ " es un tablón de $\frac{3}{4}$ de pulgada.
- En el juego de fútbol americano se habla de yardas.
- Las distancias en algunos países anglosajones se miden en millas; una milla son 1.609 km.
- En el mar lo usual es medir las longitudes horizontales en millas náuticas (1 milla náutica son 1,852 metros), pero las verticales, o sea la profundidad del mar, en brazas (1 braza es 1.852 metros: la milésima parte de una milla náutica). La milla náutica también es la base de la unidad usual para medir la velocidad del viento o de aeronaves: el nudo (que es una milla náutica por hora). Y ya que hablamos de aeronaves, la altura a la que estas viajan se suele medir en pies.
- En astronomía la unidad de longitud más usual es el año luz: la distancia que recorre la luz en un año (9,460,728,000,000 km, es decir, algo menos de 10 billones de kilómetros).

Capacidades

- Algunos recipientes de líquidos para el hogar expresan el contenido en galones; un galón es, aproximadamente, 3.8 litros.
- Los biberones y las llamadas “fórmulas” de leche para bebé están calculados en onzas líquidas; curiosamente, también las usan los cantineros para preparar algunas bebidas alcohólicas. Por cierto, se trata aquí de las onzas líquidas, que según si se trata del sistema inglés o del estadounidense, equivalen a 28.4 ml o a 29.6 ml, respectivamente, y no de alguna de las dos unidades de peso con el mismo nombre (ver abajo).

Masas y pesos

- Algunas masas en países anglosajones se miden en libras (una libra son 454 gramos).
- La onza común (28.3 gramos) es otra medida de masa usada en países anglosajones. La onza troy (31.3 gramos) se utiliza en joyería y numismática.

Espacio de memoria computacional

En algunos contextos la manera actual que se tiene en el ambiente de programación computacional para medir el espacio de memoria es así:

- Un terabyte (1TB) son 1024 gigabytes
- Un gigabyte (1GB) son 1024 megabytes
- Un megabyte (1MB) son 1024 kilobytes
- Un kilobyte (1KB) son 1024 bytes
- Un byte son 8 bits, es decir, una sucesión de 8 valores que pueden ser 0 o 1

Aunque estos números pueden parecer tan arbitrarios como los de las conversiones entre millas, furlongs, rods y otros, se basan en la lógica binaria: 1024 es 2^{10} , es decir $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$.

Sin embargo, aún no hay un acuerdo en las conversiones entre unidades, y ocurre, por ejemplo, que cuando se habla de *hardware* se usan las mismas unidades, pero con un sistema decimal, según el cual:

- Un terabyte son 1000 gigabytes
- Un gigabyte son 1000 megabytes
- Un megabyte son 1000 kilobytes
- Un kilobyte son 1000 bytes

Medición del tiempo

Otras unidades que no están en el Sistema Internacional son las del tiempo. Los factores de conversión de una unidad a la siguiente tampoco van de diez en diez. Como sabes:

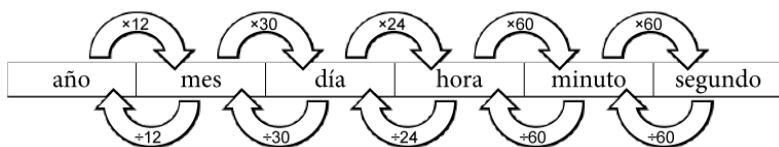
- Un siglo son 100 años
- Un año son 12 meses, o aproximadamente 365 días
- Un mes son 30 días (según la convención)
- Un día son 24 horas
- Una hora son 60 minutos
- Un minuto son 60 segundos
- Y las unidades más pequeñas son la subdivisión de un segundo en décimos, centésimos, etc.)

De estos factores de conversión, algunos provienen de realidades de la naturaleza, como el hecho de que un día es el tiempo que le toma a la Tierra dar una vuelta sobre su propio eje, y el hecho de que le toma 365.242193 días a la Tierra darle la vuelta al Sol. Otros son confecciones humanas, como la partición del día en 24 horas, y la partición de una hora en 60 minutos. Estos números pueden parecer arbitrarios, pero tienen algunas ventajas; el hecho es que

cuando los científicos que crearon el SMD pusieron manos a la obra para unificar y simplificar todo, consideraron muchas características (¡hasta la temperatura!), pero no cambiaron las subdivisiones del día, y seguimos dividiendo el día en 24 horas y luego las horas en 60 minutos y los minutos en 60 segundos (a esta división de la unidad en 60 partes se la llama “sexagesimal”).

Eso quiere decir que hay que tener mucho cuidado al manejar datos relacionados con el tiempo. Cuando se habla de horas, minutos y segundos lo usual es poner dos puntos entre unos y otros; por ejemplo, 3:15 hrs son tres horas con quince minutos. En el uso diario, lo más común es que el número antes de los dos puntos se refiera a la cantidad de horas, y si además se desea señalar los segundos se usan nuevamente dos puntos. Así, 2:40:45 hrs se refiere a dos horas con 40 minutos y 45 segundos; muchos relojes completan a dos cifras la primera cantidad, y expresan ese tiempo como 02:40:45. Por otra parte, si estamos hablando de tiempos muy cortos, también podríamos expresar tres minutos con quince segundos así: 3:15 min.

¿Cómo convertir entonces, por ejemplo, los tiempos que están expresados en meses en tiempos expresados en días, o cómo expresar en horas lo que está expresado en minutos? Como primer acercamiento podemos tener un esquema similar a los anteriores, solo que ahora no vamos de diez en diez, ni siempre el factor de conversión es el mismo:



Veamos entonces algunos ejemplos de cálculos y conversiones con tiempos.

- Supongamos que quieres programar en una presentación tres videos cuya duración en minutos es, respectivamente,

5:16, 4:48 y 6:31, dejando entre cada video un letrero que aparece en la pantalla durante 2 segundos. ¿Cuánto dura toda la presentación? Quieres sumar

$$5:16 + 0:02 + 4:48 + 0:02 + 6:31$$

Una manera es, primero, sumar los minutos:

$$5 + 0 + 4 + 0 + 6 = 15$$

y luego sumar los segundos:

$$16 + 2 + 48 + 2 + 31 = 99$$

Como 99 segundos son más de un minuto, los convertimos en

$$99 = 60 + 39$$

o sea en un minuto, que sumamos a los 15 que ya teníamos, y 39 segundos. La presentación durará en total 16:39 minutos.

- En una estación de radio se transmite 80 veces a la semana un promocional que dura 43 segundos. ¿Cuánto tiempo se dedica semanalmente al promocional? Tenemos $43 \times 80 = 3440$ segundos, pero ¿cuántos minutos u horas son eso? Podemos utilizar la calculadora para hacer el cálculo, como se muestra a continuación:

Operación en la calculadora	Interpretación
$43 \times 80 = 3440$	el tiempo total para el promocional, expresado en segundos
$\div 60 = 57.33333....$	el tiempo total para el promocional, expresado en minutos: 57 minutos y algo más
$- 57 = 0.33333....$	el “algo más” restante, expresado en minutos
$\times 60 = 20$	el “algo más” restante, expresado en segundos

Es decir, semanalmente se dedican al promocional 57 minutos con 20 segundos, 00:57:20 hrs, algo menos de una hora.

Cuando se trabaja repetidamente con tiempos, es frecuente que se traduzcan todos a números decimales. Tomemos nuevamente el ejemplo de 3 horas con 15 minutos, 3:15 hrs. Como 15 minutos

son la cuarta parte de una hora, también decimos que 3:15 hrs son 3 horas y un cuarto (3 horas y $\frac{1}{4}$). Ese “cuarto”, expresado decimalmente, es 0.25. Es decir, 3:15 expresado decimalmente es 3.25 horas. Observa que para pasar de 0:15 a 0.25 lo que podemos hacer es dividir 15 entre 60.

Observa también la diferencia entre usar dos puntos y un punto. Así, 3:15 es equivalente a 3.25. Sin embargo, 3.15 y 3:25 no son equivalentes, como se muestra en seguida:

sexagesimal		decimal
3:15 (tres horas y 15 minutos)	=	3.25 (tres horas y 25 centésimos de hora)
3:09 (tres horas y 9 minutos)	=	3.15 (3 horas y 15 centésimos de hora)
3:25 (tres horas con 25 minutos)	=	3.416666... (3 horas y casi 42 centésimos de hora)

De manera similar, 1.5 horas es una hora y media, o sea 1 hora con 30 minutos (1:30), y no 1 hora con 5 minutos y tampoco 1 hora con 50 minutos. En forma análoga, 0:20 expresado decimalmente es 0.33333...; efectivamente, veinte minutos son un tercio de una hora.

¿Cómo convertir horas y minutos, o minutos y segundos, a números decimales y viceversa? En general:

- Para pasar de horas y minutos a horas y fracciones decimales de hora, divide los minutos entre 60 y agrégle el resultado a las horas. La misma operación se realiza para pasar de minutos y segundos a minutos y fracciones decimales.
 - Por ejemplo, $4:20 \text{ minutos} = 4 + \frac{20}{60} = 4.333\ldots \text{ minutos}$.
- Inversamente, para pasar de horas y fracciones decimales a horas y minutos, multiplica la parte decimal por 60 y el resultado son los minutos. La misma operación se realiza para pasar de minutos y fracciones decimales a minutos y segundos.
 - Por ejemplo, $5.40 \text{ horas} = 5 + (0.40 \times 60) = 5:24 \text{ horas}$.

Para terminar, veremos un par de ejemplos que resolveremos paso a paso.

- Convertamos 6:19:43 horas (6 horas con 19 minutos y 43 segundos) a horas y fracciones decimales. Para ello:
 - podemos empezar teniendo una estimación del tiempo: se trata de 6 horas y un poco menos de 20 minutos ($\frac{1}{3}=0.33333\dots$ de hora), o sea algo menos de 6.33333... horas;
 - convirtiendo los segundos en fracciones decimales de minuto, lo que obtenemos es que 43 segundos son $\frac{43}{60}=0.71666\dots$ minutos;
 - ahora la cantidad de minutos que tenemos son los 19 que aparecían en la expresión original más los 0.71666... que acabamos de encontrar. Es decir, tenemos 19.71666... minutos;
 - convirtamos esos minutos en una fracción decimal de hora: $\frac{19.71666\dots}{60}=0.3286111\dots$ horas.
 - Es decir, 6:19:43 horas se convierten en 6.3286111... horas; esto coincide con nuestra estimación. Según la precisión que necesitemos, podemos redondear a 6.33 horas o a 6.3 horas
- Ahora convirtamos 2.46923 horas en horas, minutos y segundos.
 - primero veamos que se trata de algo menos de 2.5 horas, o sea de algo menos de 2:30 horas;
 - luego 0.46923 horas se convierten en $0.46923 \times 60 = 28.1538$ minutos, es decir 28 minutos y 0.1538 minutos;
 - después, 0.1538 minutos se convierten en $0.1538 \times 60 = 9.228$ segundos, es decir 9 segundos y una fracción decimal; si solo nos interesan los segundos redondeamos este resultado a 9 segundos;

- entonces tenemos 2 horas más 28 minutos más 9 segundos, es decir que 2.46923 horas son 2:28:09 horas. Efectivamente, esto es algo menos de 2:30 horas.

EJERCICIOS

Recuerda que los ejercicios con numeración par son similares a los que los preceden. Haz solamente aquellos que consideres necesarios para tu proceso de aprendizaje.

2.31. Convierte las siguientes medidas como se indica:

- | | |
|------------------------|--|
| a) 563.62 m = ____ km | i) 3.24mg = ____μg |
| b) 3127.7 cm = ____ m | j) 36 cm ² = ____ dm ² |
| c) 0.0327 m = ____ mm | k) 5.46 ha = ____ m ² |
| d) 0.5631 m = ____ dm | l) 32.4 m ³ = ____ cm ³ |
| e) 563 cl = ____ l | m) 0.043 m ³ = ____dam ³ |
| f) 56.7 ml = ____ cl | n) 45 l = ____ dm ³ |
| g) 5684.2 g = ____ kg | o) 56.045 hm ³ = ____ l |
| h) 0.0052 kg = ____ mg | |

2.32. Convierte las siguientes medidas como se indica:

- | | |
|-----------------------------------|--|
| a) 63.62 km = ____ m | m) 1674 μg = ____ cg |
| b) 0.456 mm = ____ cm | n) 3.24 mg = ____ μg |
| c) 1348.1 μm = ____ mm | o) 0.042 m^2 = ____ cm^2 |
| d) 18946 dam = ____ km | p) 5634 km^2 = ____ ha |
| e) 5.56 hm = ____ cm | q) 0.5571 dm^2 = ____ mm^2 |
| f) 2.1 km = ____ mm | r) 32.4 mm^3 = ____ cm^3 |
| g) 0.00547 l = ____ cl | s) 4701 dm^3 = ____ m^3 |
| h) 87.1 dl = ____ l | t) 5640 hm^3 = ____ m^3 |
| i) 87.1 dl = ____ dal | u) 26.1 cl = ____ mm^3 |
| j) 0.00052 l = ____ ml | v) 48.31 m^3 = ____ kl |
| k) 70.712 dg = ____ mg | w) 3206 l = ____ m^3 |
| l) 250 g = ____ kg | x) 88.8 dm^3 = ____ dl |

2.33. ¿Con qué unidad sería más conveniente expresar cada una de las siguientes medidas?

- La distancia, en una ciudad, entre el zócalo y la caseta de salida a la autopista
- El tiempo que dura una película
- La dosis de ácido acetilsalicílico en una aspirina
- La distancia entre una puerta cerrada y su marco
- El contenido de una cisterna de agua
- La temperatura a la que debe estar un horno para elaborar una receta
- El tiempo que pasa entre que se vislumbra un rayo y se oye el trueno
- La capacidad del tanque de gasolina de un automóvil

2.34. ¿Con qué unidad sería más conveniente expresar cada una de las siguientes medidas?

- a) El contenido de un paquete de cereal
- b) El contenido de un frasco de mermelada
- c) El tiempo que tarda un vuelo transcontinental
- d) El contenido de un barril de petróleo
- e) El peso de la “ballena” (o trabe) con la que está construido un puente
- f) La distancia entre las yemas del pulgar y el meñique en una mano extendida
- g) El largo del cabello de un cantante de rock
- h) La cantidad de insulina en una ampollita inyectable
- i) La distancia entre dos estrellas
- j) El contenido de agua en una alberca olímpica
- k) El área del Zócalo de la Ciudad de México
- l) La cantidad de alfombra necesaria para cubrir una recámara
- m) La cantidad de bias necesario para hacer el dobladillo de una falda
- n) La cantidad de gas utilizado en un mes en una casa
- o) La cantidad que hay que pagar por medio kilo de queso
- p) La cantidad de oro que hay que utilizar para fabricar un dije
- q) El tiempo que tarda Júpiter en darle la vuelta al Sol

2.35. Contesta las siguientes preguntas.

- a) Luz María compró medio cuarto de queso rallado. ¿Cuántos gramos de queso compró?
- b) Un recién nacido pesó 3875 gramos. ¿Cuál es su peso en kilos?
- c) El sonido viaja a 343 m/seg. ¿Cuál es su velocidad en km/hora?
- d) Una cisterna mide 12.5 m de largo por 5.2 m de ancho y tiene una profundidad de 1.7 m. ¿Cuántos litros le caben? (**Nota:** El volumen de la cisterna se calcula multiplicando el largo por el ancho y por la profundidad)
- e) ¿Cuántos mililitros caben en una jeringa de 10 cc? (**Nota:** $1\text{cc} = 1\text{cm}^3$)
- f) Un boxeador famoso pesaba 176 libras. Si una libra son 454 gramos, ¿cuánto pesaba el boxeador en kilos?

2.36. Contesta las siguientes preguntas.

- a) En una farmacia, una señora compró tres cuartos de litro de agua oxigenada. ¿Cuántos mililitros de agua oxigenada compró?
- b) En una revista se anuncia que cierto automóvil rinde 35 millas por galón de gasolina. Si una milla son 1.609 kilómetros y un galón son 3.8 litros, ¿cuál es el rendimiento del automóvil en kilómetros por litro?
- c) ¿Cuánto mide de ancho una broca de $\frac{3}{8}$ de pulgada, si una pulgada son 2.54 cm?
- d) Un libro de 856 páginas pesa 1.320 kg antes de empastarlo. ¿Cuánto pesa cada hoja?
- e) Unos azulejos cuadrados de 30 cm de lado se venden en cajas de 14 piezas. Si se tienen 3 cajas, ¿qué superficie se puede cubrir con los azulejos?
- f) Un frasco de jarabe tiene un cuarto de litro. Si el paciente debe tomar 5 ml cada 8 horas, ¿para cuántas tomas le alcanza el frasco?
- g) Una persona mide 1.68 m. ¿Cuál es su estatura en centímetros? ¿Cuál es su estatura en decímetros?

2.37. Convierte las siguientes medidas como se indica:

- a) 100 meses = ____ años y ____ meses
- b) 1000 días = ____ años, ____ meses y ____ días
- c) 100 días = ____ meses y ____ días
- d) 10 días = ____ horas
- e) 100 horas = ____ días y ____ horas
- f) 10 horas = ____ minutos
- g) 100 minutos = ____ horas y ____ minutos
- h) 10 minutos = ____ segundos
- i) 100 segundos = ____ minutos y ____ segundos

2.38. Convierte las siguientes medidas como se indica:

- a) 7 años = ____ meses
- b) 10 años y 10 meses = ____ meses
- c) 34 meses = ____ años y ____ meses
- d) 10 años, 10 meses y 10 días = ____ días
- e) 555 días = ____ años, ____ meses y ____ días
- f) 7 meses y 2 días = ____ días
- g) 3 días = ____ horas
- h) 8 días y 8 horas = ____ horas
- i) 300 horas = ____ días y ____ horas
- j) 10 horas y 10 minutos = ____ minutos
- k) 60 minutos = ____ segundos
- l) 5 minutos y 5 segundos = ____ segundos
- m) 156 segundos = ____ minutos y ____ segundos

2.39. Expresa los siguientes tiempos en decimales o sexagesimales como se indica:

- a) 11:11 horas = ____ . ____ horas
- b) 11.11 horas = ____ : ____ horas
- c) 25:12 minutos = ____ . ____ minutos
- d) 25.12 minutos = ____ : ____ minutos
- e) 8:23:12 horas = ____ . ____ horas
- f) 8.2312 horas = ____ : ____ : ____ horas

2.40. Expresa los siguientes tiempos en decimales o sexagesimales como se indica:

- a) 08:30 horas = ____ . ____ horas
- b) 08.30 horas = ____ : ____ horas
- c) 15:15 minutos = ____ . ____ minutos
- d) 15.15 minutos = ____ : ____ minutos
- e) 10:10:10 horas = ____ . ____ horas
- f) 10.1010 horas = ____ : ____ : ____ horas

2.41. Contesta las siguientes preguntas.

- a) Un alumno empezó su examen a las 10:05 a.m. y terminó a las 11:37 a.m.
¿Cuántos minutos tardó en el examen?
- b) Un corredor tardó 2.55 horas en completar la carrera de maratón.
¿Cuántas horas, minutos y segundos corrió?
- c) Si una película dura 137 minutos, ¿cuántas horas dura?
- d) Si un profesor tiene una antigüedad de 10.87 años, ¿a cuántos meses y días asciende su antigüedad?
- e) Un pastel requiere 40 minutos en el horno. Si se mete al horno a las 11:52 a.m., ¿a qué hora hay que sacarlo?
- f) Javier llevó un curso de cómputo de 50 horas en total, en 15 sesiones semanales. ¿Cuánto duraba cada sesión?

2.42. Contesta las siguientes preguntas.

- a) Si la edad de un bebé es de 30 meses, ¿cuál es su edad en años?
- b) Una persona salió de la Ciudad de México a las 8:35 a.m. y llegó a Guanajuato a la 1:20 p.m. ¿Cuánto tiempo tardó en llegar?
- c) ¿Cuánto tiempo, en siglos y décimos de siglo, ha transcurrido desde la revolución francesa?
- d) Elisa va a presentar un examen de 120 preguntas de opción múltiple y le dan para ello 3 horas. ¿Cuántos minutos en promedio debe calcular para cada pregunta?
- e) En una fábrica de botones, la máquina A produce 100 cajas de 80 botones cada una en 2:15 horas. Ahora se pretende comprar otra máquina (B) que produce en 2.5 horas 200 cajas de 50 botones cada una. ¿Cuál de las dos máquinas es más rápida?
- f) Hoy es martes. ¿Qué día de la semana será dentro de cuatro años exactamente?

2.43. En cada uno de los siguientes incisos hay un absurdo. Indica cuál es.

- a) La zona metropolitana de Ciudad de México está a 2200 metros sobre el nivel del mar, y tiene aproximadamente 22 millones de habitantes. Por lo tanto a cada habitante le corresponde $2200 \div 22000000 = 0.0001 \text{ m} = 0.1 \text{ mm}$

b)



- c) En una receta se indica poner al horno una masa, a 200 °C por 20 minutos. Marisol tiene mucha prisa, entonces decide poner la masa por 5 minutos a 800 °C.
- d) Perla compró unos anteojos de 2.5 dioptrías. ¿Cuántas dioptrías le tocan a cada ojo?
- e) Un famoso vals le toma un minuto a un grupo de 30 músicos. ¿Cuánto tarda en tocarlo un grupo de 15 músicos?

3. LETRAS EN EXPRESIONES MATEMÁTICAS

Una de las grandes dificultades a las que se enfrentan los estudiosos de ciencias sociales, al tratar de comprender relaciones entre objetos matemáticos o para realizar cálculos, tiene que ver con el uso de las letras en fórmulas y con algunos símbolos que frecuentemente resultan extraños. En este capítulo intentaremos proporcionar, de manera muy breve, algunas explicaciones.

Antes de entrar en materia, pensemos que las matemáticas son un lenguaje y que, como todo lenguaje, tiene imprecisiones. Hay veces en que dos palabras distintas se refieren al mismo significado (“sinonimia”), y hay veces en que la misma palabra significa dos cosas distintas (“homonimia”). He aquí algunos ejemplos de sinónimos, es decir, palabras distintas que tienen un mismo significado –o significados muy similares– en español:

- Morada, casa, vivienda, hogar, residencia, nido...
- Cobrar, recibir, ganar, obtener, percibir, adquirir...
- Bonito, bello, hermoso, precioso, lindo...

Por otra parte, ahora tenemos algunos ejemplos de homónimos, es decir, palabras que significan dos o más cosas distintas en español:

- Gato: puede ser un felino, como en “mi gato se llama Peluso”, o un juego, como en “cuando juego gato con Irene siempre

empatamos”, o una herramienta, como en “no pude cambiar la llanta del coche porque no tenía gato”.

- Morada: puede ser un color, como en “la vestimenta de algunos jerarcas eclesiásticos es morada”, o una casa, como en “su humilde morada”.
- Bravo: puede referirse a algo que no es manso, como en “toro bravo”, o bien, a algo digno de aplauso, como en “¡bravo, muy bien!”, o inclusive a un apellido, como en “Nicolás Bravo”.
- Siento: puede ser del verbo sentir, como en “siento cosquillas”, o del verbo sentar, como en “en esta silla me siento con la espalda bien derecha”.
- Tomo: puede referirse al verbo tomar, como en “cuando maneje no tomo”, o a un libro, como en “el segundo tomo de la enciclopedia”.

A la lista podríamos agregar otros casos en los que dos palabras distintas se pronuncian igual, aunque se escriben con diferente ortografía, como cocer (en una estufa) y coser (con aguja e hilo), o como rallar (desmenuzar) y rayar (hacer rayas), o como hecho (del verbo hacer) y echo (del verbo echar), o como ciento (100) y siento (de los verbos sentir o sentar). En estos casos las confusiones ocurren verbalmente y es importante tener en cuenta la ortografía para que no sucedan por escrito.

¿Cómo sabemos cuándo estamos hablando de un gato, un gato o un gato? Así enunciadas las palabras solas, no podemos saber, pero puestas en un contexto general ya sabemos si se trata de un felino, un juego o una herramienta. En algunos casos, aun teniendo el contexto puede haber confusiones, como si decimos: “en ese sillón no me siento bien”. Otro ejemplo mexicano de homonimia que se presenta en el mismo contexto es el de la palabra “hasta”: por ejemplo, si decimos “el doctor se encuentra en el consultorio hasta las 4 p.m.”, no queda claro si el doctor *llega* al consultorio a las 4 p.m., o bien, si está ahí antes de las 4 p.m. pero *se va* a esa hora.

En matemáticas ocurre algo muy similar. Pensemos en el conocido signo de igualdad: $=$. Este signo se puede leer como “**igual a**” o como “**es igual a**”. La única diferencia entre ambas expresiones es la presencia o ausencia del verbo “es”. Por ejemplo, veamos estas dos afirmaciones y cómo leerlas:

Afirmación	Lectura
Este paquete pesa $p = 6$ kg	“Este paquete <u>pesa</u> <i>pe</i> igual a seis kilos”
En este otro paquete, $p = 8$ kg	“En este otro paquete, <i>pe</i> es igual a ocho kilos”

Observa los verbos principales de las afirmaciones: “pesa” en la primera, y “es” en la segunda, donde el verbo está incluido en el signo $=$. Incluso podría ocurrir que se leyera la primera afirmación como: “este paquete pesa *pe* **es igual a** seis kilos”, y la segunda como: “en este otro paquete, *pe* **igual a** ocho kilos”, porque, aunque suena mal, se entiende. Pero esto puede ser distinto en frases más complejas.

¿Cómo saber cuándo $=$ se lee “igual a” y cuándo se lee “es igual a”? Como en el caso del gato, es el contexto el que le confiere sentido a una lectura o la otra.

Por otra parte, en matemáticas frecuentemente se utilizan las mismas letras para referirse a cosas distintas, e incluso algunos símbolos se pueden utilizar también con sentidos distintos, siempre dependiendo del contexto.

En todos los idiomas son frecuentes las historias chuscas y los chistes de extranjeros que confunden palabras y significados, y solo cuando estamos en una situación similar comprendemos verdaderamente las dificultades por las que atraviesa una persona que aprende una lengua. Pues algo similar ocurre con ese lenguaje que son las matemáticas: confundimos “palabras” y significados, símbolos, usos de las letras, etc. Este capítulo pretende ayudarte a “ser extranjero” en un mundo en el que la lengua sea

matemática, explicitando algunas de las sinonimias y homonimias más importantes que hay en ella.

3.1. USO DE LETRAS EN EXPRESIONES MATEMÁTICAS

En esta sección veremos cómo las letras pueden tener diferentes usos en expresiones matemáticas: variables, unidades, constantes y otros casos. Nos detendremos un poco en aquellas letras y símbolos más usuales y resaltaremos algunos casos comunes de sinonimia y de homonimia. Finalmente, analizaremos cómo manejar las diversas letras que pueden aparecer en fórmulas matemáticas.

3.1.1. Variables, valores y unidades de medida

Tal vez los usos más frecuentes de letras en matemáticas son las variables, sus valores y las unidades de medida. No pretendemos aquí dar una definición formal de unas ni de otras, pero sí explicar mediante algunos ejemplos.

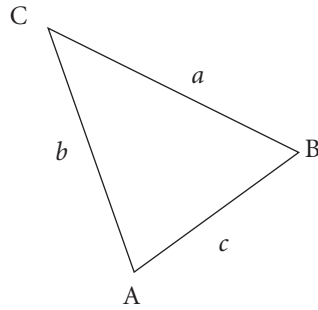
- Pensemos en la estatura de una persona adulta llamada Guadalupe, digamos: 1.68 m. Entonces tenemos un número (1.68) y una **unidad de medida** (el metro). Ahora pensemos en otra persona llamada Trinidad, y digamos que mide 1.53 m: tenemos otro número y la misma unidad de medida. Si pensamos en muchas personas, tenemos muchos números distintos, y también puede haber personas que midan lo mismo o casi lo mismo. Ahora tenemos una **variable**: la *estatura de personas adultas (medida en metros)*. Además, las estaturas particulares de las personas son los **valores** de esa variable; en nuestro ejemplo, 1.68 y 1.53 son valores de esta variable. Las estaturas de adultos más pequeña y más alta registradas han

sido de 0.65 m y de 2.72 m, por lo que podemos decir que esta variable toma valores en el intervalo $[0.65, 2.72]$.

- De la misma manera, el *peso* de las personas es otra **variable**, y el peso de cada quien es un **valor** de esa variable. Por ejemplo, Guadalupe puede pesar 70 kg, y Trinidad puede pesar 67 kg. Y, claro, kg es la **unidad de medida**.

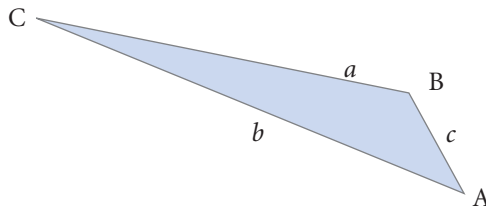
- En Geometría suelen usarse letras mayúsculas para denotar los vértices de una figura y letras minúsculas para denotar longitudes. Por ejemplo, en

el triángulo ABC de la derecha, las letras A, B y C se refieren a los vértices y las letras minúsculas corresponden a medidas; así, si pensamos en el lado opuesto al vértice A, es decir, el lado entre los vértices B y C, podemos llamar a ese lado BC y su



longitud es a . De manera similar, el lado opuesto al vértice B es AC y su longitud es b , y el lado opuesto al vértice C es AB y su longitud es c . Si consideráramos otro triángulo, uno con

otra forma o tamaño, las longitudes a , b y c cambiarían también, por lo que podemos pensar



que estas longitudes son tres **variables**. En el triángulo blanco del ejemplo, estas letras toman respectivamente los **valores** $a = 3.7$ cm, $b = 3.4$ cm y $c = 2.7$ cm. Si ahora tenemos el triángulo gris de la siguiente figura, los valores son respectivamente $a = 4.9$ cm, $b = 6.0$ cm y $c = 1.4$ cm; en las tres variables la **unidad de medida** son los centímetros.

- El salario mínimo diario en la Ciudad de México y otros estados ha ido variando cada año (y a veces más de una vez por año). En 1992 era de \$13.33 diarios y a principios de 2013 era de \$64.76. Otros valores han sido \$20.15 en 1996, \$37.90 en 2000, \$45.24 en 2004, \$52.59 en 2008 y \$62.33 en 2012. Podemos considerar el salario mínimo como una **variable** y, en ese caso, los números 13.33, 37.90 y demás, son diversos **valores** de la variable “salario mínimo”. Aquí la **unidad de medida** es el peso: \$.

Las variables se usan frecuentemente para expresar cálculos. Por ejemplo:

- El Índice de Masa Corporal (*IMC*) permite saber si una persona padece sobrepeso. Si buscas en Internet, encontrarás la siguiente fórmula:

$$IMC = \frac{\text{peso (kg)}}{\text{estatura}^2 \text{ (m)}}$$

La fórmula significa que el *IMC* se calcula dividiendo el peso de una persona, expresado en kilogramos, entre el cuadrado de su estatura, expresada en metros. Es decir, para Guadalupe $IMC = \frac{70}{1.68^2} = 24.8$, mientras que para Trinidad $IMC = \frac{67}{1.53^2} = 28.6$. El *IMC* es una nueva **variable**, y los dos **valores** que hemos encontrado son 24.8 y 28.6; cuando se habla de *IMC* no suele usarse **unidad de medida**.* Una vez conociendo el *IMC* de una persona se puede saber si está baja de peso ($IMC \leq 18.5$), en peso normal ($18.5 < IMC \leq 25$), tiene sobrepeso ($IMC > 25$) o es obesa ($IMC > 30$). En nuestro ejemplo, Guadalupe tiene un peso normal, pero Trinidad tiene sobrepeso, aunque no llega a tener obesidad.

* Formalmente, la unidad de medida del *IMC* es kg/m².

La fórmula para el *IMC* también se puede expresar como $IMC = \frac{p \text{ (kg)}}{e^2 \text{ (m)}}$, si previamente nos pusimos de acuerdo en que p es el peso de una persona y e es su estatura, o como $IMC = \frac{p}{e^2}$ si también acordamos usar las unidades del Sistema Internacional de medidas. Incluso podríamos decir que $IMC = \frac{x}{z}$, si previamente acordamos que x es el peso en kilogramos y z es el **cuadrado de la estatura** en metros. Es decir, depende de los acuerdos previos que hayamos tomado. Parecería que la primera fórmula no requiere de acuerdos previos, pero debemos observar que en $IMC = \frac{\text{peso (kg)}}{\text{estatura}^2 \text{ (m)}}$ las expresiones (kg) y (m) **solamente indican las unidades de medida** y NO son parte de la fórmula, en el sentido de que no se multiplica nada ahí. La razón por la que aparecen las unidades de medida es para asegurar que se usan esas y no otras; por ejemplo, si Guadalupe viviera en EE. UU., diría que pesa 154 libras y mide 5.5 pies (o 66 pulgadas), pero su *IMC* no es $\frac{154}{5.5^2} = 5.1$ (¡ni tampoco $\frac{154}{6.6^2} = 0.04!$).

En expresiones como $IMC = \frac{\text{peso (kg)}}{\text{estatura}^2 \text{ (m)}}$, $IMC = \frac{p \text{ (kg)}}{e^2 \text{ (m)}}$, o $IMC = \frac{p}{e^2}$ o $IMC = \frac{x}{z}$, las palabras o letras *peso*, *estatura*, p , e , x , z deben ser sustituidas por valores numéricos para encontrar el Índice de Masa Corporal de una persona. También decimos que esas letras en las fórmulas son **literales**; por ejemplo, la expresión $\frac{p \text{ (kg)}}{e^2 \text{ (m)}}$ contiene literales (p y e), un número (la potencia 2) y unidades de medida (kg y m).

- Regresemos a Trinidad. Puede plantearse la pregunta: ¿cuántos kilos como máximo puede pesar Trinidad para tener un *IMC* que no sea de sobrepeso? Si llamamos x a ese peso, tenemos la expresión $\frac{x}{1.53^2} = 25$. Ahora la letra x es un valor que estamos buscando y que podemos conocer porque es la que hace verdadera la igualdad dado que conocemos la

estatura (1.53) y el *IMC* máximo para no tener sobrepeso (25); decimos que x es una **incógnita**. El peso que resuelve esta ecuación es $x = 58.5$ kg; si Trinidad se mantiene debajo de ese peso no tendrá sobrepeso.

- En un triángulo cuyos lados tengan longitudes a , b y c , el perímetro se calcula como $P = a + b + c$ (la suma de las tres medidas); se genera una nueva **variable**, P , a partir de las tres variables a , b y c . En nuestros ejemplos, el perímetro del triángulo blanco toma el **valor** $P = 3.7 + 3.4 + 2.7 = 9.8$ cm, y el del gris toma el valor $P = 4.9 + 6.0 + 1.4 = 12.3$ cm.

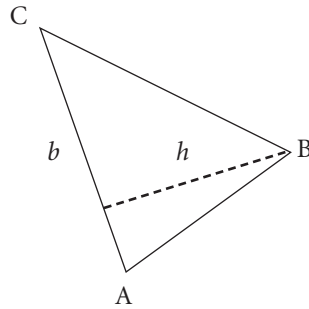
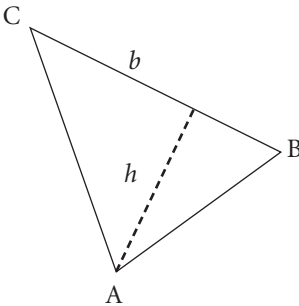
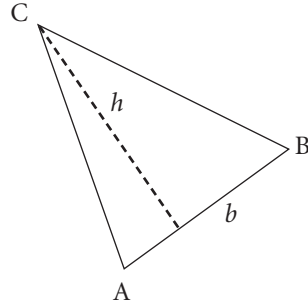
Con respecto a las unidades de medida, hay algunas diferencias entre las variables anteriores que vale la pena resaltar.

- En general, las unidades de medida se expresan *después* del número; así, escribimos 1.68 m, 70 kg o 3.7 cm. Sin embargo, cuando hablamos de dinero, la unidad de medida se coloca *antes* del número; así, escribimos que el salario mínimo es de \$62.33, aunque decimos “62.33 pesos”.
- En el ejemplo del Índice de Masa Corporal, las unidades de medida aparecen en la fórmula, pero en el resultado final el *IMC* se expresa sin unidades. En cambio, en la fórmula del perímetro $P = a + b + c$ no aparecen unidades, pero al realizar el cálculo $P = 3.7 + 3.4 + 2.7 = 9.8$ cm hemos expresado el resultado final con sus unidades de medida. Este segundo caso es el más usual: las unidades de medida no se utilizan en las fórmulas, pero sí en el resultado final.

El ejemplo del triángulo nos permitirá ahora ver otros casos de homonimia.

- Veamos cómo se calcula el área. La fórmula se conoce en general con la receta “base por altura sobre dos”, y se expresa con la fórmula $A = \frac{b \times h}{2}$ o con $A = \frac{bh}{2}$. En ella, b significa

la longitud de “la base”, pero “la base” puede ser cualquiera de los tres lados; solo hay que tener en cuenta, entonces, cuál es la altura correspondiente.



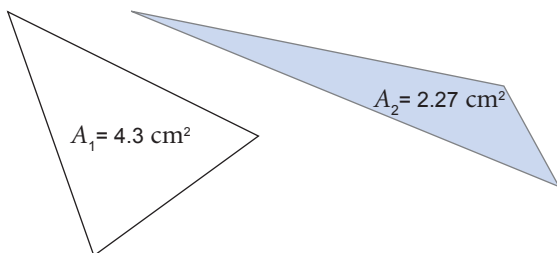
- Observa que en el último de estos triángulos la letra b aparece en el mismo lugar del triángulo blanco de la página 191. Ahí b era la longitud del lado opuesto al vértice B (es decir, la longitud de *un lado específico*, el lado AC), pero en la fórmula $A = \frac{b \times h}{2}$ la letra b ("base") se refiere a *cualquiera de los lados*.
- En el mismo ejemplo del triángulo, observa que también hemos usado la letra A con dos significados diferentes: por una parte A es un *vértice* del triángulo, y por otra parte A es el *área* del triángulo. El contexto indica de cuál A se habla cada vez.

Como vemos, en los casos de homonimia el sentido está dado por el contexto. Es como si dijéramos “estoy entrenando a mi gato a jugar gato”: nadie entendería que estoy entrenando a una herramienta a hacerla de felino, ¿verdad?



3.1.2. Subíndices

En el ejemplo anterior, el área del triángulo blanco es $A = 4.3 \text{ cm}^2$ (independientemente de cuál lado es “ b ” y cuál es su correspondiente h)*; si calculamos también el área del triángulo gris obtendríamos $A = 2.27 \text{ cm}^2$. Para distinguir un área de otra podríamos hablar de la primera área como A_1 (se lee “A uno”) y de la segunda como A_2 (“A dos”).



Si en lugar de dos triángulos tuviéramos cinco, podríamos entonces hablar de las áreas A_1, A_2, A_3, A_4 y A_5 . Estos números pequeños y colocados en la parte inferior reciben el nombre de **subíndices**, y sirven para numerar, etiquetar o nombrar distintas cosas, en este caso, valores de área de distintos triángulos.

Veamos un ejemplo más de subíndices.

- Supongamos que un alumno obtiene las siguientes calificaciones en su curso de psicología social: 7.8, 6.2, 8.5 y 9.5. Si su calificación final es el promedio de todas ellas, se calcula así: $\frac{7.8 + 6.2 + 8.5 + 9.5}{4} = 8.0$. El maestro del curso debe calificar a todos los alumnos de la misma manera. Si llama x_1 a la calificación del primer examen parcial, y x_2, x_3 y x_4 a la segunda, tercera y cuarta calificaciones, respectivamente, para cada alumno realizará el cálculo del promedio así: $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$.

* Si deseas verificar esto en estos triángulos o en cualquier otro, ten en cuenta que el resultado del área puede variar ligeramente, debido a imprecisiones en las mediciones.

Hemos usado los subíndices para denotar las diferentes calificaciones parciales.

3.1.3. Constantes

Para hablar de constantes, consideremos el siguiente ejemplo:

- Don Rubén es taxista y diariamente llena el tanque de gasolina al empezar su jornada. En diciembre de 2012 el precio de la gasolina era de \$10.81 por litro. Así, cada día lo que gastaba en gasolina era igual a \$10.81 multiplicado por la cantidad, en litros, del combustible cargado. Por ejemplo, si un día cargó 31 litros, eso le costó $10.81 \times 31 = \$335.11$, y si otro día cargó 20 litros, eso le costó $10.81 \times 20 = \$216.20$. En estos cálculos la cantidad de \$10.81 es una **constante**, mientras que la cantidad de litros es una variable. Efectivamente, el precio de la gasolina se mantuvo constante durante todo el mes: el costo de llenar el tanque era de $10.81 \times L$, donde L es la cantidad de litros con los que se llena el tanque.

Sin embargo, si Don Rubén quisiera comparar lo que gastaba en combustible al cargar 20 litros en los meses previos del año, debe considerar el precio de un litro de gasolina a lo largo de 2012. Ese precio varió como se aprecia en la siguiente tabla.

Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
9.82	9.91	10.00	10.09	10.18	10.27	10.36	10.45	10.54	10.63	10.72	10.81

Para calcular el costo de cargarle 20 litros de gasolina en cada mes, ahora debe considerar $20 \times P$, donde P era el precio del mes. Por ejemplo, en abril 20 litros costaban \$201.80, y en agosto costaban \$209.00. Ahora lo que es **constante** es la cantidad de gasolina (20 litros), mientras que lo que es **variable** es el precio mensual del combustible.

Entonces, ¡todo es relativo! Lo que en un contexto es una variable, en otro contexto puede convertirse en una constante, y viceversa.

Acerca de las constantes, hay algunas que suelen representarse con letras específicas. He aquí algunos ejemplos conocidos:

- $\pi = 3.141592653589793238462643383279502884197169399\dots$ (la letra griega pi) es la cantidad de veces que cabe un diámetro en la longitud de la circunferencia; en general se redondea a $\pi \approx 3.14$ o a $\pi \approx 3.1416$. Tú has usado este número para calcular la longitud de una circunferencia conociendo su radio, con la fórmula $2\pi r$.
- $e = 2.71828182845904523536028747135266249775724709\dots$ es la base de los logaritmos naturales; en general se redondea a $e \approx 2.72$ (pero la letra e se puede usar también en otros sentidos; por ejemplo, la usamos previamente para estaturas).
- $g \approx 9.80665 \text{ m/s}^2$ es la aceleración de la gravedad terrestre; en general se redondea a $g \approx 9.81$ (¡ojo: no confundir con la g usada como unidad de medida, o sea, el gramo!).
- $c \approx 299,792.458 \text{ km/s}$ es la velocidad de la luz; en general se redondea a $c \approx 300,000$ (esta c es la que aparece en la famosa fórmula $E=mc^2$ de Albert Einstein).

3.1.4. Letras y símbolos más usados

Letras

En los ejemplos anteriores, hemos visto variables y constantes representadas por letras, que pueden ser mayúsculas o minúsculas y de cualquier lugar del abecedario.

Efectivamente, en principio cualquier variable, valor o constante se puede denotar con una letra o combinación de letras, y también es usual utilizar letras griegas.

El alfabeto griego

Letras griegas y sus equivalentes latinas				
Mayúscula	Minúscula	Nombre	Equivalente	¡No confundir...!
A	α	alfa	A	α no es ∞ (infinito) ni $\propto$ (que se usa para denotar que dos cantidades son proporcionales entre sí)
B	β	beta	B	β no es el número 8
Γ	γ	gamma	G	γ no es v (“v de vaca”) ni y (“y de yo”)
Δ	δ	delta	D	Δ no es Λ (lambda)
E	ε	épsilon	E	ε no es € (signo de euros) ni $\in$ (“pertenece”)
Z	ζ	dseta	Z	ζ no es ξ (ver más abajo)
H	η	eta	E (larga)	H no es hache y η no es n (“n de nido”)
Θ	θ o bien ϑ	theta	TH , T	
I	ι	iota	I	
K	κ	kappa	C , K	
Λ	λ	lambda	L	Λ no es Δ (delta)
M	μ	mu	M	μ no es u (“u de untar”)
N	ν	nu	N	ν no es v (“v de vaca”)
Ξ	ξ	xi (ksi)	X	ξ no es ζ (ver más arriba)
O	$\omicron$	ómicron	O	
Π	π	pi	P	
P	ρ	rho	R	P no es P (“P de Pedro”) y ρ no es p (“p de piso”)
Σ	σ o bien ς	sigma	S	Σ no es E (“E de Ernesto”) y σ no es el número 6, ni una o acentuada (“o de ónix”)
T	τ	tau	T	
Υ	υ	úpsilon	Y , U	
Φ	ϕ o bien φ	fi (phi)	F	
X	χ	ji (chi)	J	Ni X ni χ son X ni x (equis)
Ψ	ψ	psi	PS	
Ω	ω	omega	O (larga)	

En cuanto a las unidades de medida, aunque en general se representan con letras aceptadas convencionalmente, también puede haber versiones ligeramente distintas (por ejemplo, la representación correcta del kilogramo es kg, pero en algunos contextos se usa Kg o K).

Así, podríamos decir que vamos a representar la estatura con e , como lo hicimos anteriormente, o con E , con X , con y , con β , u otra letra. A fin de cuentas, la elección del símbolo con que se representa algo es arbitraria. Incluso podríamos representar la estatura con otros símbolos como $\mathcal{E}$, $\mathbb{E}$, o como پش , پ , ش , پش , پش , ó پش , ¿por qué no? Estrictamente hablando, lo único que necesitamos es **ponernos de acuerdo** en que el símbolo o la letra que escojamos representa la estatura. Además es altamente conveniente que sea práctico: fácil de reproducir, no confundible con otros símbolos que se estén utilizando y que no tenga un sentido que se le otorgue comúnmente y que sea distinto del que pretendemos asignarle. De acuerdo con esta recomendación, los últimos símbolos enlistados no serían convenientes.

Sin embargo, también es cierto que **en general** la costumbre ha ido llevando a utilizar unas letras más que otras, según los distintos contextos. Así, por ejemplo, **frecuentemente**:

- las letras X, Y, Z o bien x, y, z se refieren a variables. En algunos contextos se utilizan las mayúsculas para las variables y las minúsculas para sus valores
- las letras a, b, c, k se refieren a constantes
- la letra n se refiere a la cantidad de elementos con los que se está trabajando
- las letras f, g, h o bien, las letras griegas φ, θ, ψ se refieren a funciones. (Se hablará de funciones más adelante, en el capítulo 5)
- las letras i, j, k se refieren a subíndices

- al hablar de conjuntos, las letras mayúsculas se refieren a conjuntos y las minúsculas a elementos de los conjuntos. En cuanto a los conjuntos de números, como vimos antes, los naturales, los enteros, los racionales, los reales y los complejos se representan, respectivamente, con las letras $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$
- en geometría, las letras mayúsculas se refieren a puntos, mientras que letras griegas como α , β , φ , θ se utilizan para ángulos. Las letras minúsculas como l , r , s , t se refieren a rectas, pero también pueden usarse letras minúsculas como a , b , c , d , l , m , r para hablar de longitudes. Cuando una letra como r se usa para representar una longitud puede tomar un valor numérico, mientras que cuando se usa para representar una recta es solamente una etiqueta para ponerle nombre a la recta
- en estadística las letras griegas como μ , σ y ρ representan ciertas características de la población, mientras que las letras latinas como s y r representan las de una muestra.

Empero, insistimos: este pequeño listado describe lo que es usual, pero nada impide que X sea una constante, b sea una función, h sea un punto o l sea una variable. Es el contexto lo que va indicando qué uso se le da a cada letra, y por ello es muy importante, al consultar por ejemplo una fórmula en un libro, ver no solamente la propia fórmula, sino la explicación previa de qué se entiende por cada símbolo y de cómo se usan también recursos tipográficos como las letras negritas (como **estas**), cursivas (como *estas*), u otros. Conviene anotar también que a veces estas aclaraciones se presentan al principio del libro, a veces en los párrafos que preceden a la fórmula y a veces inmediatamente después de ella.

- Vale la pena hacer una observación sobre la letra y , llamada en español “y griega” o “ye”. Como señalamos arriba, su uso

más común en matemáticas es como variable (sobre todo si ya hay una variable llamada x). Sin embargo, en español, “y” es también una palabra sumamente común, la llamada “conjunción copulativa”. A veces es necesario observar con cuidado de cuál de las dos “y” se está hablando. Por ejemplo, he aquí dos frases:

“consideremos las variables x, y, z ”,

“consideremos las variables x y z ”.

Además del uso de las comas, la otra pequeña diferencia entre ambas es la tipografía de la “y”. La primera frase se lee “consideremos las variables equis, ye, zeta”, mientras que la segunda se lee “consideremos las variables equis y zeta”. *

Símbolos matemáticos

Algo similar a lo que ocurre con las letras se presenta con los símbolos matemáticos. Algunos tienen un sentido único que es reconocido por todos, aunque se usen más en unos contextos que en otros, mientras que otros símbolos tienen un sentido diferente según el contexto en que se usan.

Así como una lengua como el español tiene una o varias palabras para cada concepto, de la misma manera el lenguaje matemático recurre a toda clase de símbolos para expresar los objetos matemáticos y sus relaciones: podemos pensar en alfabetos distintos del latino y el griego, en flechas, círculos, cuadrados, rombos, caracteres en cursivas, negritas, con distintos tamaños y tipografías, entre otros.

* Este es un problema que existe en español pero no en otras lenguas. Por ejemplo, la primera frase se diría en inglés “let us consider the variables x, y, z ”, mientras que la segunda se diría “let us consider the variables x and z ”. En inglés no hay confusión posible entre las dos frases.

Algunos de los símbolos matemáticos más usuales

A continuación veremos algunos ejemplos, clasificados según el contexto en el que se suelen presentar. La lista te puede parecer extensa, pero no es exhaustiva. **Lo importante no es, de ninguna manera, que aprendas todos estos símbolos y sus significados, sino que observes que son muchos, que son diversos, y que puede haber símbolos con dos o más significados y también significados con dos o más símbolos.** Recuerda que para saber en cada caso de cuál de los sentidos estamos hablando, es importante que veas el contexto.

- **Infinito.** Como hemos visto, el infinito se denota con ∞ (no confundir con la letra griega alfa, α).
- **Operaciones.** Tal vez los símbolos más reconocidos de manera general son los de las operaciones: $+$, $-$, $\times$, $\div$, y también $\sqrt{}$. Estos cinco símbolos se utilizan principalmente con ese sentido. Sin embargo, hay otros signos para estas operaciones que pueden tener otros significados en otros contextos. En particular, hemos visto que la multiplicación de a por b se puede escribir, además de axb , como $(a)(b)$, $a(b)$, $a \cdot b$, $a * b$ o ab , y que la división de a entre b se puede escribir, además de $a \div b$, como $\frac{a}{b}$, a/b , $a:b$ o con la denominada “casita”, con a dentro de la casita y b fuera de ella $b \overline{)a}$. En cuanto a la potenciación, aunque en general se denota con el exponente arriba y con caracteres más pequeños, como en a^2 , también se utiliza el símbolo $\wedge$: así, a^2 también se puede escribir $a \wedge 2$. Cuando hay más de una operación se suelen utilizar también paréntesis (...), corchetes [...] y hasta llaves {...} o los llamados “paréntesis angulares” $\langle \dots \rangle$; en el siguiente capítulo se verá cómo leer expresiones que utilizan algunos de estos elementos. Cabe señalar que varios de los símbolos $\cdot$, $*$, $/$, $:$ y $\wedge$, así como los paréntesis, los corchetes y las llaves, se suelen utilizar con otros sentidos en otros contextos.

- **Otras operaciones.** A veces se utiliza la expresión $\pm$ para denotar los resultados de la diferencia y la suma de dos números dados. Por ejemplo, 5 ± 2 puede representar los números 3 y 7. Como vimos anteriormente, se usan dos barras para denotar el valor absoluto de un número: $|-5| = 5$ y también $|5| = 5$. El factorial de un número natural, que es el producto de ese número por todos los naturales menores a él, se denota con “!”; así, $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$, pero el signo de cierre de admiración se puede usar también con otros significados.
- **Comparaciones entre números.** Como hemos visto, los signos $=$ y $\neq$ significan respectivamente “igual” y “distinto”. Los dos símbolos $<$ y $>$ se pueden leer como “menor” o “mayor” (ver el capítulo 1), y los símbolos $\leq$ y $\geq$, se pueden leer como “menor o igual” o “mayor o igual”. Hemos utilizado el símbolo $\approx$ para denotar “aproximadamente igual”, pero también se utilizan con el mismo sentido los símbolos $\cong$ y $\sim$; este último tiene otros usos en determinados contextos. Para expresar que dos cantidades son proporcionales se suele utilizar el símbolo $\propto$ (no confundir con el infinito, ∞ , ni con la letra griega alfa, α).
- **Conjuntos.** En lenguaje de conjuntos se utilizan los símbolos $\cap$ (intersección), $\cup$ (unión), $\subset$ (inclusión), $\in$ (pertenencia), $\notin$ (no pertenece) (no confundir el símbolo $\in$ con el de la unidad monetaria euros, € , ni con la letra griega épsilon, ϵ). Estos símbolos prácticamente solo se utilizan en estos sentidos. Pero en lenguaje de conjuntos también se emplean otros símbolos que pueden cambiar de sentido en determinados contextos, como $\emptyset$ (conjunto vacío), las llaves para enlistar o describir los elementos del conjunto $\{\dots\}$ y símbolos que se leen como “tal que”: $\ni$, $|$ y otros. También, para los conjuntos de números que son intervalos, se usan los paréntesis $(\dots)$ y los corchetes $[\dots]$, como se vio en el capítulo 1.

- Relaciones lógicas.** Dos símbolos muy utilizados en expresiones matemáticas y con un solo sentido cada uno son $\forall$, que se lee “para todo” y $\exists$, que se lee “existe”. También se usa el símbolo $\nexists$, que significa “no existe”. El símbolo $\Rightarrow$ significa “implica” y el símbolo $\Leftrightarrow$ significa “es equivalente”. El símbolo $\vee$ significa “o” y el símbolo $\wedge$ significa “y” (además de su uso en la potenciación, que vimos arriba). El símbolo $\neg$ significa “no”; también se usa para ese fin el símbolo $\sim$, que puede tener otros usos (por ejemplo, en estadística $\sim$ se lee como “se distribuye”, y ya vimos que también se puede usar en el sentido de “aproximadamente igual”). El símbolo $\therefore$ se lee “por lo tanto”. El signo de cierre de admiración $!$, que ya habíamos mencionado para los factoriales, se usa también para expresar que algo es único.
- Otras ramas matemáticas.** Algunos ejemplos de notación geométrica son los siguientes: $\vec{V}$ puede ser un vector, $\angle$ significa ángulo, $\triangle$ significa triángulo, $\perp$ significa perpendicular, $\parallel$ significa paralela, y $\equiv$ significa que dos figuras son congruentes. Todos estos símbolos pueden tener otros significados en otros ámbitos. El cálculo diferencial e integral posee símbolos como ∂ , la derivada parcial, $\int$, la integral, y ∇ , el gradiente.
- También son muy frecuentes los símbolos que se utilizan para denotar que un objeto matemático ha sufrido alguna transformación, o que es, en algún sentido, “pariente” de otro. Por ejemplo, sea lo que fuere x , he aquí algunos posibles “parientes” de x :

x' (equis prima),	$\bar{x}$ (equis barra)
x'' (equis biprima),	$\hat{x}$ (equis gorro),
x^* (equis estrella),	$\tilde{x}$ (equis tilde)

Muchos de los anteriores elementos de simbología se pueden combinar. Podemos tener, por ejemplo, una expresión como

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad a \neq 0 \quad \exists! a' \in \mathbb{R} : \exists \cdot aa' = 1$$

Si tú tienes que leer expresiones como esta, te recomendamos ir haciendo la “traducción”: $\forall$ quiere decir “para todo”, $a \in \mathbb{R}$ se refiere a un número real, $a \neq 0$ significa que ese número es distinto de cero... De manera que la expresión de arriba se lee:

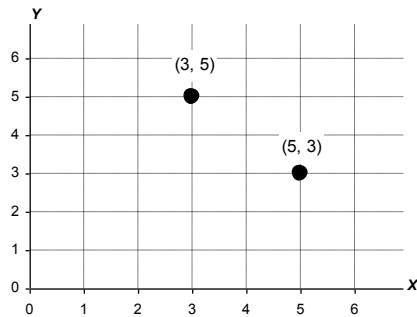
“Para todo número real a distinto de cero
existe un único número real a' (*a prima*)
tal que a por a' es igual a 1”.

Y después, para entender la afirmación, puede ser útil pensar en un ejemplo. Así, si pensamos en el número $a = 2$, entonces el número a' es $\frac{1}{2}$, y es el único que multiplicado por 2 da 1, o sea $(2)(\frac{1}{2}) = 1$. Y si pensamos en el número $a = -2.5$, entonces el número a' es -0.4 y tenemos que $(-2.5)(-0.4) = 1$. Y así, para cualquier otro número real a que no sea 0.

Es decir, hay símbolos, como +, que generalmente se usan con el mismo significado, hay significados que se pueden expresar con varios símbolos (como si fueran casos de “sinonimia”), y hay símbolos que dependiendo del contexto pueden tener varios significados (como si fueran casos de “homonimia”). Tal vez los campeones de la homonimia sean los paréntesis. Efectivamente, los **paréntesis** se pueden utilizar entre otras cosas para:

- Hacer ostensible que un número es negativo, como en $5 + (-3) = 2$
- Mostrar que dos números se multiplican, como en $(5)(3) = 15$, en $5(3) = 15$ o en $(5)3 = 15$

- Especificar que una operación se debe hacer antes que otras, como en $4 \times (5+2) = 28$. Esto se verá ampliamente en el siguiente capítulo.
- Indicar sobre qué elementos o valores se aplica una función, como en $f(x) = x^2$, que es la función que a cada número le asocia su cuadrado. La expresión $f(x)$ se lee “efe de equis”.
- Expresar una probabilidad, como en $P(3 < X < 5)$, que es la probabilidad de que X sea mayor de 3 y menor de 5, o como en $P(y \in A)$, que es la probabilidad de que y esté en el conjunto A .
- Representar un intervalo de números, como en $(3, 5)$, que es el conjunto de todos los números mayores que 3 y menores que 5.
- Señalar que dos elementos forman una pareja y que el orden entre ellos es importante. Por ejemplo, en el plano cartesiano el punto $(3, 5)$ es distinto del punto $(5, 3)$: esto se ilustra en la gráfica de la derecha.
- Completar algunos subíndices, como cuando en estadística se expresa $F_{(3,5)}$ que significa la distribución F con 3 y 5 grados de libertad.
- Hacer anotaciones de manera similar a como usamos los paréntesis en español, como en el caso de la fórmula del IMC que vimos arriba.



Dos usos más de los paréntesis

Los paréntesis se usan en matemáticas para denotar muy diversas cosas: números negativos, multiplicación, jerarquía de las operaciones, funciones, probabilidades, intervalos, parejas ordenadas, subíndices... He aquí dos usos más. Aunque poco utilizados comúnmente en las matemáticas en ciencias sociales, los paréntesis se pueden utilizar también para:

- Referir a la cantidad de maneras de combinar varios elementos, como en $\binom{5}{3} = 10$, que son las combinaciones de 5 elementos tomados de 3 en 3. Si los 5 elementos son $\clubsuit$, $\diamond$, $\heartsuit$, $\spadesuit$ y $\smiley$, entonces las diez combinaciones de 3 en 3 son $\clubsuit\diamond\heartsuit$, $\clubsuit\diamond\spadesuit$, $\clubsuit\diamond\smiley$, $\clubsuit\heartsuit\spadesuit$, $\clubsuit\heartsuit\smiley$, $\clubsuit\spadesuit\smiley$, $\diamond\heartsuit\spadesuit$, $\diamond\heartsuit\smiley$, $\diamond\spadesuit\smiley$ y $\heartsuit\spadesuit\smiley$. También se puede escribir C_5^3 . Observa que en la expresión C_5^3 el número 3 es un superíndice y el número 5 es un subíndice. En ambos casos tenemos números en caracteres pequeños, pero están usados en sentidos distintos de los que hemos indicado previamente, porque el número 3 no indica que se eleve nada al cubo, y el número 5 no indica que se trate del quinto elemento de una serie.
- Describir un arreglo rectangular de números o “matriz”. Por ejemplo, las constantes en un sistema de ecuaciones se pueden acomodar como en la matriz $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3.1.5. Letras y fórmulas

En resumen, cada letra en una fórmula o expresión matemática puede ser:

- Una variable, que toma valores específicos según el caso (por ejemplo, la estatura de una persona). El valor puede ser conocido o desconocido. Si es conocido, se debe sustituir en la fórmula la letra por el valor numérico específico del que se trate. Si es desconocido, la letra se refiere a una incógnita

cuyo valor se puede encontrar si se tiene la información necesaria.

- Una constante, cuyo valor numérico debe estar especificado en el contexto, o bien, una constante de uso general como las ejemplificadas anteriormente. En la fórmula se debe sustituir la letra por el valor numérico de la constante o por una aproximación.
- Una unidad de medida. Estas letras no se sustituyen por un valor numérico, sino que indican qué unidad de medida se usa en las magnitudes consideradas.
- Un elemento en un grupo de letras que a su vez puede ser una variable, una constante o una unidad de medida. Es decir, a veces una variable, una constante o una unidad se representa no con una sola letra sino con un grupo de dos o más letras. Hemos visto en esta sección algunos ejemplos de esto: *IMC*, *estatura*, *peso*, *kg*. Observa estas dos expresiones:
 - Podemos referirnos al salario mínimo mensual de 2012 en la Ciudad de México como *sm*. Se tenía entonces que $sm = 134 \text{ USD}$, donde *usd* significa dólares estadounidenses. Aquí las dos letras *sm* corresponden a un solo número, y las tres letras *USD* corresponden a la unidad monetaria.
 - En un caso anterior nos referimos a la famosa fórmula de Einstein $E=mc^2$. Aquí las letras *m* y *c* corresponden a dos números distintos (la masa, que es una variable, y la velocidad de la luz, que es una constante), el 2 es un exponente, y la expresión mc^2 significa que los dos números *m* y c^2 se multiplican.

¿Cómo saber, entonces, a cuántos números corresponden dos o más letras seguidas en una fórmula? Como en los casos anteriores, la respuesta a esta pregunta está en el contexto. Puede ocurrir que:

- una letra no corresponda a ningún número, como en el caso de la m en la fórmula del Índice de Masa Corporal;
- una letra corresponda a un número, como en las longitudes a , b , c y h del ejemplo del triángulo;
- dos o más letras no correspondan a ningún número, como en el caso de kg en la fórmula del Índice de Masa Corporal;
- dos o más letras correspondan a un solo número, como cuando sm se refiere al salario mínimo;
- dos o más letras correspondan a dos o más números, como bh en la fórmula $A = \frac{bh}{2}$.

Por todo esto, cuando usas una fórmula que aparece en un libro, te recomendamos en especial observar con cuidado qué se indica previamente acerca del **significado de cada una de las letras** que aparezcan en ella.

Cabe anotar que, en general, cuando en un libro aparece una fórmula con letras y números, los números son constantes, es decir, no dependen de las condiciones específicas ni de los valores que puedan tomar las letras. Por ejemplo, en la fórmula

$$H = \frac{\frac{12}{n(n+1)}S - 3(n+1)}{1 - \frac{E}{n^3 - n}}$$

tenemos que n , S y E son variables y los números 12, 1 y 3 son constantes, independientemente de los valores que tomen n , S y E .

Una última observación: en algunos casos se usan en fórmulas letras que son a la vez una variable y la unidad de medida que se usa en ella. Por ejemplo, tal vez has visto la fórmula para convertir una temperatura de grados Celsius a grados Fahrenheit: $^{\circ}F = \frac{9}{5}^{\circ}C + 32$. En ella, $^{\circ}C$ se refiere a la temperatura en Celsius y también al centígrado como unidad. Por ejemplo, si queremos saber a qué temperatura en Fahrenheit hierve el agua, tenemos $^{\circ}F = \frac{9}{5} \times 100^{\circ}C + 32 = 180 + 32 = 212^{\circ}F$

EJERCICIOS

Recuerda que los ejercicios con numeración par son similares a los que los preceden. Haz solamente aquellos que consideres necesarios para tu proceso de aprendizaje.

3.01. En las siguientes fórmulas indica, para cada número, letra o grupo de letras, si se trata de una variable, una constante o una unidad de medida.

- a) Longitud de la circunferencia: $C = 2\pi r$
- b) Área del círculo: $A = \pi r^2$
- c) Velocidad en función de la distancia y el tiempo: $v = \frac{d}{t}$
- d) Conversión del número de horas en cantidad de minutos: $\text{min} = 60 \times \text{hr}$
- e) Cálculo en km de un año luz (que es la distancia que recorre la luz en un año): $D = c \times 60 \times 60 \times 24 \times 365$
- f) Velocidad a la que cae un cuerpo después de t segundos de haber sido soltado en caída libre: $v = g \times t$
- g) Potencia, en función del trabajo y el tiempo: $P = \frac{T}{t}$
- h) Hipotenusa en función de los dos catetos: $h = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$
- i) Valor de la incógnita en una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, conociendo los números a , b y c : $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

3.02. En las siguientes fórmulas indica, para cada número, letra o grupo de letras, si se trata de una variable, una constante o una unidad de medida.

- a) Volumen de la esfera: $V = \frac{4}{3} \pi r^3$
- b) Área de la esfera: $A = 4\pi r^2$
- c) Área de un polígono regular en función del perímetro y la apotema:
 $A = \frac{Pa}{2}$
- d) Conversión de grados Fahrenheit a grados Celsius: $^{\circ}\text{C} = \frac{^{\circ}\text{F} - 32}{1.8}$
- e) Presión $P = \frac{\text{masa (kg)}}{\text{superficie (m}^2\text{)}}$
- f) Densidad, en función de la masa y el volumen: $d = \frac{m}{v}$

- g) Aceleración, en función de la velocidad inicial, la velocidad final y el tiempo: $a = \frac{V_f - V_i}{t}$
- h) Trabajo, en función de la fuerza y la distancia: $T = Fd$
- i) Segunda ley de Newton, que relaciona la fuerza con la masa y la aceleración: $F=ma$

3.2. SUBÍNDICES Y SUMATORIAS

Recordemos que los subíndices son números pequeños colocados a la derecha y abajo de una letra, y que sirven para numerar, etiquetar o nombrar distintas variables o valores de una misma variable. Los subíndices suelen representar una de las dificultades que tienen personas de áreas no científicas para poder leer y usar textos matemáticos y científicos. Si tú te enfrentas en tus estudios a expresiones como $\frac{\sum x}{n}$ o como $\sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij} \right)^2$ y te resulta difícil entenderlas, esta sección puede ayudarte a hacerlo. Antes de que emprendas el estudio de la sección, queremos hacerte dos observaciones:

1. Si no te enfrentas a fórmulas con Σ ni con expresiones como x_i , esta sección puede parecerte innecesaria, entonces te recomendamos pasar al siguiente capítulo y, cuando necesites usar expresiones como las de arriba, regresar a esta sección. De la misma manera, si te enfrentas a expresiones como x_i , pero no a expresiones como x_{ij} , puede tener sentido que abordes el apartado 3.2.1., donde se estudia el uso de un subíndice, pero no el apartado 3.2.2., sobre el uso de dos subíndices simultáneos.
2. Utilizaremos para la presentación ejemplos de la vida cotidiana en los que usaremos la notación de subíndices, con la pretensión de que la notación pueda adquirir un sentido práctico, aunque en la vida real no se utilice.

3.2.1. Uso de un subíndice y sumatorias

Subíndice

Como dijimos anteriormente, los subíndices pueden usarse como una manera de etiquetar o de numerar una colección de valores numéricos que han sido representados con letras. Por ejemplo:

- Supongamos que nos fijamos en cuánto se pagó por el consumo de luz de un departamento a lo largo de los seis bimestres de cierto año, y que estos pagos fueron de \$393.50, \$351.20, \$478.40, \$715.80, \$203.50 y \$331.60. Si decidimos representar con la letra x lo que se pagó, entonces podemos numerar los pagos según el bimestre y tenemos

$$x_1 = 393.50, x_2 = 351.20, x_3 = 478.40, x_4 = 715.80, x_5 = 203.50 \text{ y } x_6 = 331.60$$

Aquí el subíndice indica de qué bimestre estamos hablando. Por ejemplo, el mayor consumo de este departamento fue en el cuarto bimestre, en los meses de julio y agosto.

Como aquí tenemos 6 bimestres, podemos decir que se hicieron 6 pagos, es decir, la cantidad de pagos es $n = 6$.

Así como decimos que el pago es x podemos usar una letra para referirnos a los subíndices en general. Usamos para ello las letras i, j, k .

- Podemos decir en general que el pago de luz en el bimestre i fue por la cantidad x_i . En cuanto a la lectura de esta expresión, x_i se lee “equis i ”. Si es necesario, aclararemos que i puede valer desde 1 hasta 6, y escribimos esto así: $i = 1, \dots, 6$. El pago x_i es el **iésimo** pago: el pago que hicimos en el bimestre i . Si no le damos un valor específico al subíndice i , x_i se refiere a *cualquiera* de los seis pagos.

Sumatoria

Si en el primer ejemplo queremos ver cuánto pagamos en total por el consumo de luz en el año, lo que tenemos que hacer es sumar los pagos:

$$393.50 + 351.20 + 478.40 + 715.80 + 203.50 + 331.60$$

Es decir, tenemos que calcular

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

Ahora bien, en vez de decir “sumamos el primer pago más el segundo más el tercero más el cuarto más el quinto más el sexto”, podemos decir simplemente: “sumamos todos los pagos”. Eso lo expresamos con la letra griega mayúscula Σ (sigma), así:

$$\Sigma x_i$$

Esa expresión se llama **sumatoria** y se lee: “la suma de las *equis i*”. Es decir:

$$\Sigma x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

Hay otras maneras de expresar que se suman todas las x_i ; las presentamos en la siguiente tabla con la forma en que se leen:

Expresión	Se lee...	Se usa cuando...
Σx	...la suma de las <i>equis</i>	...es claro, en el contexto, cuántas y cuáles son las x que debemos sumar
Σx_i	...la suma de las <i>equis i</i>	...hay que especificar que las x han sido numeradas con el subíndice i
$\Sigma_i x_i$	...la suma sobre i de las <i>equis i</i>	
$\sum_{i=1}^6 x_i$	...la suma, desde que i vale 1 hasta que vale 6, de las <i>equis i</i>	
$\sum_{i=1}^n x_i$	...la suma, desde que i vale 1 hasta que vale <i>ene</i> , de las <i>equis i</i>	...hay que especificar que las x han sido numeradas con el subíndice i , y cuáles se suman (desde la primera hasta la sexta o hasta la <i>enésima</i>)

En el ejemplo del pago de luz, podríamos indicar la suma así:

$$\Sigma x = 393.50 + 351.20 + 478.40 + 715.80 + 203.50 + 331.60 = \$2,474.00$$

O con cualquiera de las otras expresiones de la tabla

Otras sumatorias

Puede ocurrir que los números que se suman en una sumatoria sean a su vez el resultado de alguna operación. Por ejemplo, que se sumen los cuadrados de una serie de números x_i , lo cual se indica con Σx_i^2 . Así, en Estadística puedes encontrar expresiones como la anterior, o $(\Sigma x_i)^2$ o con dos variables, como $\Sigma x_i y_i$ o $\Sigma x_i \Sigma y_i$. A continuación veremos un ejemplo numérico sencillo.

Supongamos que tenemos dos variables, X y Y , con tres valores cada una:

X	Y
$x_1 = 1$	$y_1 = 4$
$x_2 = 0$	$y_2 = 3$
$x_3 = 2$	$y_3 = 0$

Y veamos cómo se leen y se calculan algunas sumatorias:

Expresión	Se lee...	Se refiere a...	Cálculo
Σx_i	La suma de las equis i	La suma de las x	$1+0+2 = 3$
Σx_i^2	La suma de las equis i cuadradas	La suma de los cuadrados de las x	$1^2+0^2+2^2 = 1+0+4 = 5$
$(\Sigma x_i)^2$	El cuadrado de la suma de las equis i	La suma de las x , elevada al cuadrado	$(1+0+2)^2 = 3^2 = 9$
Σy_i	La suma de las ye i	La suma de las y	$4+3+0 = 7$

Expresión	Se lee...	Se refiere a...	Cálculo
$\sum y_i^2$	La suma de las y e i cuadradas	La suma de los cuadrados de las y	$4^2+3^2+0^2 = 16+9+0 = 25$
$(\sum y_i)^2$	El cuadrado de la suma de las y e i	La suma de las y , elevada al cuadrado	$(4+3+0)^2 = 7^2 = 49$
$\sum x_i y_i$	La suma de las x e y e i	La suma de los productos de x y y	$1 \times 4 + 0 \times 3 + 2 \times 0 = 4+0+0 = 4$
$\sum x_i \sum y_i$	La suma de las x e i por la suma de las y e i	El producto de la suma de las x por la suma de las y	$(1+0+2) \times (4+3+0) = 3 \times 7 = 21$

Observa que en estas expresiones no marcamos que el subíndice utilizado es i en la Σ , sino solamente en las x_i y las y_i . También podríamos haber usado las otras maneras de expresar las sumatorias de la tabla de la página 214.

Algo que también se puede observar con este ejemplo es que hay expresiones muy parecidas verbalmente, que se pueden confundir como en un trabalenguas. Sin embargo, dan lugar a resultados numéricos que son, en general, distintos. Por ejemplo:

- No es lo mismo la suma de los cuadrados que el cuadrado de la suma; es decir, en general $\sum x^2 \neq (\sum x)^2$. En nuestro ejemplo, para X , la suma de los cuadrados es $\sum x^2 = 5$, mientras que el cuadrado de la suma es $(\sum x)^2 = 9$.
- No es lo mismo la suma de los productos que el producto de las sumas; es decir, en general $\sum xy \neq \sum x \sum y$. En nuestro ejemplo la suma de los productos es $\sum xy = 4$, mientras que el producto de las sumas es $\sum x \sum y = 21$.

3.2.2. Dos subíndices

Si no te enfrentas a expresiones como Σx_{ij} , no es necesario que revises este apartado.

Puede ocurrir que se manejen simultáneamente dos subíndices distintos para una misma serie de datos; aquí veremos cómo se trabaja con ellos. Vamos a utilizar el ejemplo de los pagos por energía eléctrica ya mencionado, introduciendo un segundo criterio de clasificación.

Recordemos el ejemplo. Supongamos que el departamento está en un pequeño edificio junto con otros dos departamentos, y que queremos considerar los pagos que se hicieron cada bimestre en los tres departamentos. Ahora podemos tener una situación como la siguiente:

	Departamento 1	Departamento 2	Departamento 3
Bimestre 1	$x_1 = 393.50$	$x_1 = 226.10$	$x_1 = 415.80$
Bimestre 2	$x_2 = 351.20$	$x_2 = 235.40$	$x_2 = 408.30$
Bimestre 3	$x_3 = 478.40$	$x_3 = 318.90$	$x_3 = 532.10$
Bimestre 4	$x_4 = 715.80$	$x_4 = 397.30$	$x_4 = 908.70$
Bimestre 5	$x_5 = 203.50$	$x_5 = 198.40$	$x_5 = 400.50$
Bimestre 6	$x_6 = 331.60$	$x_6 = 200.70$	$x_6 = 450.20$

Observa que ahora tenemos tres valores para cada x_i . Por ejemplo, $x_5 = 203.50$, pero también $x_5 = 198.40$, pero también $x_5 = 400.50$. Es decir, si nos preguntamos por el pago en el quinto bimestre, tenemos que especificar de cuál departamento estamos hablando. Eso lo podemos hacer con otro subíndice: podemos decir que $j=1$ es el departamento 1, $j=2$ el departamento 2 y $j=3$ el departamento 3. En general, así como hablamos del i -ésimo bimestre, hablaremos del j -ésimo departamento. Ahora los pagos se pueden denotar así:

	Departamento 1	Departamento 2	Departamento 3
Bimestre 1	$x_{11} = 393.50$	$x_{12} = 226.10$	$x_{13} = 415.80$
Bimestre 2	$x_{21} = 351.20$	$x_{22} = 235.40$	$x_{23} = 408.30$
Bimestre 3	$x_{31} = 478.40$	$x_{32} = 318.90$	$x_{33} = 532.10$
Bimestre 4	$x_{41} = 715.80$	$x_{42} = 397.30$	$x_{43} = 908.70$
Bimestre 5	$x_{51} = 203.50$	$x_{52} = 198.40$	$x_{53} = 400.50$
Bimestre 6	$x_{61} = 331.60$	$x_{62} = 200.70$	$x_{63} = 450.20$

Puedes ver que, por ejemplo, x_{32} es el pago que hizo en el *tercer bimestre* el *departamento 2* (o sea \$318.90), mientras que x_{23} es el pago que hizo en el *segundo bimestre* el *departamento 3* (o sea \$408.30). En general, podemos decir que x_{ij} es el pago que hizo, en el i -ésimo *bimestre*, el j -ésimo *departamento*. Observa que x_{ij} no se lee “ksij” sino “equis-i-jota”; de la misma manera x_{32} se lee “equis tres dos” mientras que x_{23} se lee “equis dos tres”. Vale la pena notar que:

- Los dos dígitos corresponden a dos numeraciones distintas y no a un solo número de dos cifras. Así, x_{12} no es el duodécimo pago, sino el pago en el primer bimestre del departamento 2. Si uno de los dos índices llegara a tener valores de más de 10, se usaría una coma para separar ambos índices; por ejemplo, si consideramos 12 bimestres y un edificio de 20 departamentos, $x_{11,18}$ sería el pago en el undécimo bimestre del departamento 18.
- El orden de los dígitos sí importa: no es lo mismo x_{21} que x_{12} .
- Ahora tenemos, para estos subíndices, que $i = 1, \dots, 6$ y que $j = 1, \dots, 3$

Así como anteriormente consideramos el pago anual del departamento 1, podemos hacerlo con los otros dos por ejemplo, el total anual del departamento 2 es $\sum_i x_{i2} = \$1576.80$ (eso se lee “la suma sobre i de las equis i -dos”).

Por otra parte, podemos preguntarnos cuánto paga el edificio cada bimestre; por ejemplo, el cuarto bimestre se pagan en el edificio $715.80 + 397.30 + 908.70 = \$2,021.80$. Ahora estamos sumando sobre los tres departamentos cuando el bimestre es $i = 4$. Esto se puede expresar así $\sum_j x_{4j}$ (lo que se lee "la suma sobre j de las equis cuatro-jota").

	Departamento 1	Departamento 2	Departamento 3	Edificio
Bim. 1	$x_{11} = 393.50$	$x_{12} = 226.10$	$x_{13} = 415.80$	$\sum_j x_{1j} = 1035.40$
Bim. 2	$x_{21} = 351.20$	$x_{22} = 235.40$	$x_{23} = 408.30$	$\sum_j x_{2j} = 994.90$
Bim. 3	$x_{31} = 478.40$	$x_{32} = 318.90$	$x_{33} = 532.10$	$\sum_j x_{3j} = 1329.40$
Bim. 4	$x_{41} = 715.80$	$x_{42} = 397.30$	$x_{43} = 908.70$	$\sum_j x_{4j} = 2021.80$
Bim. 5	$x_{51} = 203.50$	$x_{52} = 198.40$	$x_{53} = 400.50$	$\sum_j x_{5j} = 802.40$
Bim. 6	$x_{61} = 331.60$	$x_{62} = 200.70$	$x_{63} = 450.20$	$\sum_j x_{6j} = 982.50$
Pago anual	$\sum_i x_{i1} = 2474.00$	$\sum_i x_{i2} = 1576.80$	$\sum_i x_{i3} = 3115.60$	$\sum_{ij} x_{ij} = 7166.40$

Cerraremos este apartado acerca del uso simultáneo de dos subíndices con algunas reflexiones:

- En nuestro ejemplo tenemos la misma cantidad de renglones en cada columna. Esto no ocurre siempre: hay ocasiones en las que unas columnas tienen más datos que otras, o en los que unos renglones tienen más datos que otros.
- En nuestro ejemplo tenía sentido sumar tanto los datos de una misma columna (pago anual por departamento) como los datos de un renglón (pago bimestral del edificio). Sin embargo, en otros casos puede ocurrir que uno de los

dos totales no tenga sentido. O bien, puede ocurrir que ningún total tenga sentido, pero otros cálculos sí; por ejemplo, si estamos hablando de calificaciones, la suma de ellas no tiene sentido, pero el promedio de ellas sí lo tiene.

¿Cuándo podemos decir entonces que tiene sentido hablar de renglones o de columnas, cuándo podemos decir que tiene sentido hablar de totales, de promedios o de otros cálculos? Nuevamente, como en todo lo que hemos visto, la respuesta está en el contexto, que es lo que confiere estos sentidos. Nuestra recomendación es, como siempre, ¡ten en cuenta qué significan las cosas en el contexto en que estés trabajando!

EJERCICIOS

Recuerda que los ejercicios con numeración par son similares a los que los preceden. Haz solamente aquellos que consideres necesarios para tu proceso de aprendizaje.

3.03. Con los siguientes datos calcula lo que se indica en cada inciso.

$$x_1=17 \quad x_2=25 \quad x_3=-3 \quad x_4=9 \quad x_5=-10 \quad x_6=-2 \quad x_7=13 \quad x_8=7 \quad x_9=0 \quad x_{10}=1$$

a) $\sum_{i=1}^{10} x_i$

c) $\sum_{i=3}^8 x_i$

e) $\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \right)^2$

b) $\sum_{i=1}^4 x_i$

d) $\sum_{i=1}^{10} x_i^2$

3.04. Con los siguientes datos calcula lo que se indica en cada inciso.

$x_1=17.3$

$x_2=28.1$

$x_3=0.3$

$x_4=3.3$

$x_5=5.2$

$x_6=11.6$

$x_7=10.9$

$x_8=0.0$

$x_9=6.9$

$x_{10}=18.8$

a) $\sum_{i=1}^{10} x_i$

c) $\sum_{i=3}^8 x_i$

e) $\left(\sum_{i=1}^{10} x_i\right)^2$

b) $\sum_{i=1}^4 x_i$

d) $\sum_{i=1}^{10} x_i^2$

3.05. Con los siguientes datos calcula lo que se indica en cada inciso.

$x_1=144$

$x_2=25$

$x_3=81$

$x_4=9$

$x_5=16$

$x_6=121$

$x_7=4$

$x_8=1$

a) $\sum_{i=1}^8 x_i$

d) $\sum_{i=1}^8 x_i^2$

g) $\sqrt{\sum_{i=1}^8 x_i^2}$

b) $\sum_{i=1}^8 \sqrt{x_i}$

e) $\left(\sum_{i=1}^8 x_i\right)^2$

c) $\sqrt{\sum_{i=1}^8 x_i}$

f) $\left(\sum_{i=1}^8 \sqrt{x_i}\right)^2$

3.06. Con los siguientes datos calcula lo que se indica en cada inciso.

$x_1=17.3$

$x_2=28.1$

$x_3=0.3$

$x_4=3.3$

$x_5=5.2$

$x_6=11.6$

$x_7=10.9$

$x_8=0.0$

$x_9=6.9$

$x_{10}=18.8$

$x_{11}=7.8$

$x_{12}=13.7$

$x_{13}=26.2$

$x_{14}=17.3$

a) $\sum_{i=8}^{14} x_i - \sum_{i=6}^9 x_i$

c) $\left(\sum_{i=12}^{14} x_i^3\right)^2$

e) $\sum_{i=2}^5 x_i^3$

b) $\left(\sum_{i=12}^{14} x_i^2\right)^3$

d) $\sqrt{\sum_{i=1}^4 x_i}$

f) $\left(\sum_{i=2}^5 x_i\right)^3$

3.07. Con los siguientes datos de las dos variables X y Y , calcula lo que se indica en cada inciso.

$x_1=5$	$x_2=-2$	$x_3=8$	$x_4=-7$	$x_5=-1$	$x_6=-3$	$x_7=4$	$x_8=10$
$y_1=3$	$y_2=4$	$y_3=-1$	$y_4=-5$	$y_5=6$	$y_6=-3$	$y_7=0$	$y_8=-3$

- | | | |
|--------------------|---------------------------|------------------------|
| a) $\sum xy$ | d) $(\sum x)^2$ | g) $\sum x^2$ |
| b) $\sum y^2$ | e) $(\sum x)^2(\sum y)^2$ | h) $\sum x^2 \sum y^2$ |
| c) $\sum x \sum y$ | f) $\sum y$ | i) $(\sum x \sum y)^2$ |

3.08. Con los siguientes datos de las dos variables X y Y , calcula lo que se indica en cada inciso.

$x_1=0.4$	$x_2=-0.1$	$x_3=-0.5$	$x_4=-0.3$	$x_5=0$	$x_6=-0.2$	$x_7=0.8$
$y_1=-0.3$	$y_2=0.6$	$y_3=-0.5$	$y_4=0.1$	$y_5=-0.6$	$y_6=-0.5$	$y_7=0.0$

- | | | |
|------------------------|---------------------------|---------------|
| a) $(\sum x)^2$ | d) $\sum x \sum y$ | g) $\sum y$ |
| b) $\sum x^2 \sum y^2$ | e) $(\sum x)^2(\sum y)^2$ | h) $\sum y^2$ |
| c) $\sum xy$ | f) $(\sum x \sum y)^2$ | i) $\sum x^2$ |

4. CÁLCULOS

En este capítulo veremos cómo utilizar la calculadora para hacer cálculos diversos, por ejemplo, aquellos que se hacen a partir de fórmulas. El capítulo está dividido en tres secciones, la tercera de las cuales se aboca al cálculo de fórmulas. En las dos anteriores se explican algunas convenciones para expresar las operaciones y sus resultados, que tienen implicaciones en la forma de usar correctamente las calculadoras.

Vale aclarar que en este capítulo ejemplificaremos algunos cálculos con números muy sencillos. Esto tiene la virtud de que es posible realizar mentalmente las operaciones y, entonces, se puede verificar que el manejo de la calculadora es el correcto; a su vez esto permite tener la confianza de que, al hacer cálculos similares con números más grandes o más pequeños, o decimales o negativos y positivos, el resultado obtenido en la calculadora será el correcto. Por otro lado, en ocasiones también presentaremos ejemplos con modos incorrectos de realizar los cálculos, con el fin de que se observen las diferencias en los resultados; por supuesto, tacharemos esas formas incorrectas.

4.1. JERARQUÍA DE LAS OPERACIONES

Para abordar este tema, te proponemos que realices la siguiente operación de dos maneras. Primero mentalmente y después con una calculadora científica:

$$2 + 3 \times 4 =$$

¿Obtuviste el mismo resultado de las dos maneras? ¿Coincidió tu cálculo mental con el de la calculadora? Tal vez mentalmente obtuviste el resultado 20, y seguramente la calculadora científica da el resultado 14. ¿Cómo es posible que una misma operación dé lugar a dos resultados distintos? Muchas personas, al realizar mentalmente la operación, la hacen en el orden en que está escrita: primero suman $2 + 3$ y luego multiplican el resultado por 4. Este proceso se puede esquematizar así:

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & & + & & 3 & & \times & & 4 \\ & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & & & & & & \\ & 5 & & & & & & & \\ & & \underbrace{\hspace{3.5cm}} & & & & & & \\ & & & & & & 20 & & \end{array}$$

En cambio, las calculadoras científicas realizan las operaciones en otro orden: siguen una serie de reglas llamadas **jerarquía de las operaciones**. Cuando se hacen aplicaciones matemáticas del estilo de la Estadística, se da por sentado que se va a seguir esta serie de reglas. Aquí se te pide que acompañes la lectura de este texto con una calculadora científica.

Para aplicar la jerarquía de las operaciones:

- ☞ Hay tres familias de operaciones aritméticas:
 - las sumas y restas
 - las multiplicaciones y divisiones
 - las potenciaciones y radicaciones
- ☞ Si para hacer un cálculo solamente hay operaciones de una misma familia, se realizan en el orden en el que están escritas.
- ☞ Si para hacer un cálculo hay operaciones de dos o más familias:
 - en primer lugar se efectúan las potenciaciones y radicaciones,
 - en segundo lugar se efectúan las multiplicaciones y divisiones,
 - y en tercer lugar se efectúan las sumas y restas
- ☞ Cuando hay PARÉNTESIS, se resuelven primero las operaciones que están dentro de los paréntesis, siguiendo las mismas reglas (inclusive esta misma, o sea, si hay paréntesis dentro de los paréntesis).

Ejemplos:

- a) Efectúa la operación $3 \times 6 + 4 \times 5 =$. Es posible que obtengas nuevamente dos resultados distintos. Lo que hace la calculadora científica se puede representar así:

$$\begin{array}{ccccccc}
 3 & \times & 6 & + & 4 & \times & 5 \\
 \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \\
 18 & & & & 20 & & \\
 \underbrace{\hspace{3.5cm}} & & & & & & \\
 38 & & & & & &
 \end{array}$$

Mientras que al hacer las operaciones en el orden en que están escritas se obtiene otro resultado. Hemos tachado esta forma para indicar que NO es la que se debe utilizar.

~~$$\begin{array}{ccccccc}
 3 & & \times & 6 & + & 4 & \times 5 \\
 \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & & & & & \\
 18 & & & & & & \\
 & & \underbrace{\hspace{2.5cm}} & & & & \\
 & & 22 & & & & \\
 & & & & \underbrace{\hspace{3.5cm}} & & \\
 & & & & 110 & &
 \end{array}$$~~

Observa que para que tu calculadora científica dé el resultado correcto, 38, **no debes presionar la tecla igual hasta el final de la operación**. La calculadora está programada para esperar esa indicación, y cuando la recibe hace todos los cálculos en el orden que hemos expuesto aquí, aunque nosotros, los usuarios de la calculadora, no vemos eso: solo vemos el resultado final del cálculo.

En este ejemplo no se utilizaron paréntesis. Veamos ahora otros en los que sí se utilizan.

- b) La expresión $18 - (3 + 5 \times 2)$ indica que primero se resuelve $(3 + 5 \times 2)$ y el resultado se resta a 18. Veamos cómo lo resuelve la calculadora científica usando los paréntesis como están indicados, es decir, tecleando

$$18 \text{ } \boxed{-} \text{ } \boxed{(} \text{ } 3 \text{ } \boxed{+} \text{ } 5 \text{ } \boxed{\times} \text{ } 2 \text{ } \boxed{)} \text{ } \boxed{=} \text{ } :$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 18 & - & (& 3 & + & 5 & \times 2 &) \\
 & & & & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \\
 & & & & & 10 & & \\
 & & \underbrace{\hspace{2.5cm}} & & & & & \\
 & & 13 & & & & & \\
 \underbrace{\hspace{4.5cm}} & & & & & & & \\
 5 & & & & & & &
 \end{array}$$

Si no tecleáramos los paréntesis, la misma calculadora científica haría las operaciones en otro orden. Es decir, si le indicáramos

$$18 - 3 + 5 \times 2 = ,$$

lo que haría ahora es:

$$\begin{array}{ccccccc} 18 & - & 3 & + & 5 & \times & 2 \\ & & & & \underbrace{} & & \\ & & & & & & 10 \\ \underbrace{} & & & & & & \\ & & & & & & 25 \end{array}$$

Observa entonces que no es lo mismo $18 - (3 + 5 \times 2)$ que $18 - 3 + 5 \times 2$, ya que en el primer caso el resultado es $18 - 13 = 5$, mientras que en el segundo el resultado es $18 - 3 + 10 = 25$. El primer caso podría corresponder a una pregunta como esta:

- “¿cuánto me sobra si tenía \$18 y compré una paleta de \$3 y 2 galletas de \$5 cada una?”, $18 - (3 + 5 \times 2) = \5

mientras que el segundo podría corresponder a una pregunta como:

- “¿cuánto tengo si tenía \$18, compré una paleta de \$3 y me encontré 2 monedas de \$5?” $18 - 3 + 5 \times 2 = \$25$

Si hacemos los cálculos en el orden en que están indicadas las operaciones, se obtiene este resultado incorrecto:

~~$$18 - 3 + 5 \times 2 = 40$$~~

c) Comparemos estas cuatro expresiones que involucran operaciones de la misma familia:

$$E_1 = 24 \div 4 \times 3 \div 2$$

$$E_2 = (24 \div 4 \times 3) \div 2$$

$$E_3 = 24 \div (4 \times 3) \div 2$$

$$E_4 = 24 \div (4 \times 3 \div 2)$$

El cálculo de la primera, E_1 , se puede esquematizar así:

$$\begin{array}{ccccccc}
 24 & \div & 4 & \times & 3 & \div & 2 \\
 \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & & & & & \\
 & 6 & & & & & \\
 \underbrace{\hspace{3.5cm}} & & & & & & \\
 & 18 & & & & & \\
 \underbrace{\hspace{6.5cm}} & & & & & & \\
 & 9 & & & & &
 \end{array}$$

El cálculo de la segunda, E_2 , se puede esquematizar así:

$$\begin{array}{ccccccc}
 (& 24 & \div & 4 & \times & 3 &) & \div & 2 \\
 \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & & & & & & & \\
 & 6 & & & & & & & \\
 \underbrace{\hspace{3.5cm}} & & & & & & & & \\
 & 18 & & & & & & & \\
 \underbrace{\hspace{6.5cm}} & & & & & & & & \\
 & 9 & & & & & & &
 \end{array}$$

Sin duda observaste que estas dos maneras son totalmente equivalentes: en ambas estamos realizando las operaciones en el orden en el que están escritas. Dicho de otra manera, como los paréntesis de la segunda expresión indican realizar las operaciones en el mismo orden en que se efectuarían si no existieran, esos paréntesis son innecesarios: tanto si están escritos como si no, el cálculo se efectúa del mismo modo y se obtiene el mismo resultado.

No es el caso de las siguientes dos expresiones. El cálculo de E_3 se puede esquematizar así:

$$\begin{array}{ccccccc}
 24 & \div & (& 4 & \times & 3 &) & \div & 2 \\
 & & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & & & & \\
 & & & & 12 & & & & \\
 \underbrace{\hspace{3.5cm}} & & & & & & & & \\
 & 2 & & & & & & & \\
 \underbrace{\hspace{6.5cm}} & & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & &
 \end{array}$$

Finalmente, el cálculo de E_4 se puede esquematizar así:

$$24 \div (\underbrace{4 \times 3}_{12} \div 2)$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_6$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_4$$

Verifica las operaciones anteriores con tu calculadora.

Como ves, dependiendo del orden en que se efectúan las operaciones, el resultado puede ser distinto. Las **reglas de la jerarquía de las operaciones son un acuerdo, una convención**, que hace que solo uno de los órdenes sea correcto.

También es una convención que se utilicen paréntesis cuando se desea que las operaciones se realicen en otro orden del que indican esas reglas: los paréntesis indican operaciones “dentro” de otras operaciones. Como dijimos antes, los paréntesis pueden tener más paréntesis dentro. Con tu calculadora observa, por ejemplo, que

$$3 + (5 - (2 + 6) \times 5) / 2 = -14.5$$

mientras que

$$3 + (5 - (2 + 6) \times 5 / 2) = -12$$

Aunque en ambas expresiones hay los mismos números, operaciones y dos parejas de paréntesis, el resultado es distinto porque el segundo paréntesis de cierre está colocado en un lugar diferente.

Como tu calculadora científica sigue esas convenciones, es muy importante que sepas utilizarla adecuadamente.

Cuando queremos encontrar con la calculadora el resultado de una fórmula, hay situaciones en las que es necesario agregar paréntesis antes de teclear el cálculo. Las veremos a continuación.

4.1.1. Cómo operar con números negativos

Recuerda que:

- Para marcar que un número es negativo se usa la tecla $(-)$
- Aunque a veces no es necesario, nosotras recomendamos siempre poner entre paréntesis los números negativos con los que se esté operando

Por ejemplo, tú sabes que el cuadrado de un número negativo es positivo, como $(-3)^2 = 9$. Pero si tecleas esa operación sin paréntesis obtienes un resultado incorrecto: -9 , porque así le estás indicando que calcule el negativo del cuadrado de 3.



En cambio, si tecleas con paréntesis obtienes el resultado deseado:



4.1.2. Cómo operar con la raya de fracciones o de división cuando hay otras operaciones

La raya de fracciones se usa también para denotar una división. Cuando hay operaciones arriba o debajo de la raya, la división se realiza entre los resultados de esas operaciones. Metemos esa información a la calculadora poniendo entre paréntesis las operaciones que están arriba o debajo de la raya.

Por ejemplo, $\frac{28-8}{2+3}$ es lo mismo que $\frac{(28-8)}{(2+3)}$, o sea $\frac{20}{5} = 4$.

Eso quiere decir que para efectuar la operación $\frac{28-8}{2+3}$ en una calculadora científica no se puede teclear simplemente



porque la calculadora da un resultado distinto al deseado, ya que primero divide 8 entre 2 y eso se lo resta a 28 para agregar 3. Por ello hay que indicarle el orden en que queremos que haga las operaciones; en este caso:

$$(28 - 8) \div (2 + 3) =$$

4.1.3. Cómo operar con el signo de raíz cuando hay otras operaciones

Cuando hay operaciones dentro del signo de raíz, la raíz se calcula con el resultado de esas operaciones. Metemos esa información a la calculadora poniendo entre paréntesis las operaciones que están dentro de la raíz.

Por ejemplo, $\sqrt{4+21}$ es lo mismo que $\sqrt{(4+21)} = \sqrt{25} = 5$.

Eso quiere decir que para efectuar la operación $\sqrt{4+21}$ en una calculadora científica no se puede teclear simplemente

$$\sqrt{} \ 4 \ + \ 21 \ =,$$

porque la calculadora da un resultado distinto al deseado, ya que calcula la raíz de 4 y al resultado le agrega 21. Así que hay que indicarle que calcule la raíz después de haber hecho la suma:

$$\sqrt{} \ (\ 4 \ + \ 21 \) \ =$$

Un ejemplo más con el radical: $\sqrt{\frac{64}{4}}$ es lo mismo que $\sqrt{\left(\frac{64}{4}\right)} = \sqrt{16} = 4$. Entonces, para efectuar en una calculadora científica la operación $\sqrt{\frac{64}{4}}$ no se puede simplemente teclear $\sqrt{} \ 64 \ \div \ 4 \ =$, porque la calculadora da un resultado distinto al deseado, ya que calcula la raíz de 64, y después divide el resultado entre 4. Así que hay que indicarle que la raíz debe calcularse sobre el resultado de la división:

$$\sqrt{} \ (\ 64 \ \div \ 4 \) \ =$$

4.1.4. Cómo elevar a un exponente que tiene operaciones

Cuando hay operaciones en un exponente, la potencia se calcula con el resultado de esas operaciones. Metemos esa información a la calculadora poniendo entre paréntesis las operaciones que están en el exponente.

Por ejemplo, 2^{2+3} es lo mismo que $2^5 = 32$.

Eso quiere decir que para efectuar la operación 2^{2+3} en una calculadora científica no se puede teclear simplemente $2 \text{ } x^y \text{ } + \text{ } 3 \text{ } =$, porque la calculadora da un resultado distinto al deseado, ya que calcula el cuadrado de 2 y al resultado le agrega 3. Así que hay que indicarle que calcule la potencia solamente después de haber hecho la suma:

$$2 \text{ } ^{\wedge} \text{ } (\text{ } 2 \text{ } + \text{ } 3 \text{ }) \text{ } =$$

EJERCICIOS

Recuerda que los ejercicios con numeración par son similares a los que los preceden. Haz solamente aquellos que consideres necesarios para tu proceso de aprendizaje.

4.01. Realiza mentalmente las siguientes operaciones y luego verifica el resultado con tu calculadora.

a) $5 + 3 \times (8 + 3)$

b) $12 - 6^2 \div 2$

c) $-5 - (-2) \times 4$

d) $-3 \times 20 - 21 \div (-7)$

e) $\frac{5 + 3}{5 - 3}$

f) $2 + \frac{6 \times 4}{36 \div 12} - 4^2$

g) $14 \div 2 \times \sqrt{100}$

h) $14 \times \sqrt{100} \div 2$

i) $2 - \sqrt{\frac{8 + 12}{25 \div 5}}$

j) $(7 + 5 \times 0)^{6 + (-4) \cdot 2}$

4.02. Realiza mentalmente las siguientes operaciones y luego verifica el resultado con tu calculadora.

a) $6^2 - 3 \times 10$

g) $(\sqrt{4+5})^2$

b) $8 \div 2 + 6$

h) $\sqrt{(4+5)^2}$

c) $-16 \div (-2)^3 \times (5 - 10)$

i) $\sqrt{18 - \frac{5 \times (3 - 12)}{3 - 8}}$

d) $(-13 + 9) \div (13 + (-9))$

j) $\left(\frac{30-6}{2 \times 4}\right)^{\frac{5}{2} - \frac{1}{2}}$

e) $10 \times \left(\frac{2+4}{8-5}\right)^2$

f) $\frac{5 + 3 \times 5}{4 - (-6)}$

4.03. Resuelve con tu calculadora las operaciones siguientes.

a) $18 - 71 \times (53 - 177)$

e) $\sqrt{9+10 \times 4}$

b) $7 + 189 \div (12 - 45 \div 3)$

f) $\sqrt{9+(10 \times 4)}$

c) $\frac{7-24 \times 10}{5-3 \times 15} + 95$

g) $12 \times 4^3 \div (10 - 75 \times 3)^2$

d) $\frac{(7-24) \times 10}{(5-3) \times 15} + 95$

h) $(12 \times 4)^3 \div 10 - 75 \times 3^2$

4.04. Resuelve con tu calculadora las operaciones siguientes.

a) $-28 + 7 \times (-3) \times (16 - 4 \times 28)$

j) $15 \times 3 + 17 \div 6 - (4 \times 8)$

b) $2320 \div 40 - 18 + 322 \times 5$

k) $(15 \times 3 + 17) \div (6 - 4 \times 8)$

c) $3 \times (437 - 7 \times 26)$

l) $[(15 \times 3 + 17) \div 6 - 4] \times 8$

d) $7 \times \frac{18 - 6 \times 8}{2 \times 3}$

m) $127 \div 35 + 9 \times 15 \div (6 + 15)$

e) $(5 \times 8 + 11 \times 120)^2$

n) $(127 \div 35 + 9 \times 15) \div (6 + 15)$

f) $(5 \times (8 + 11) \times 120)^2$

o) $(127 \div 35) + (9 \times 15) \div 6 + 15$

g) $\sqrt{\frac{51 - 3 \times 84}{22 \times 17 \times 5}} + 139$

p) $987 + (135 \times 24) \div (564 - 35 \times 7)$

h) $37 - 145 + 82 \times 3 - 46 \div (-7)$

r) $46 \div (3 + 187) - 35 \times (438 - 123) \div 9$

i) $15 \times (3 + 17) \div (6 - 4) \times 8$

s) $135 + (52 + 28) \times (12 \times (-5)) \div (102 + 20) + (-438) \times 6$

4.05. Para resolver cada una de las siguientes situaciones, pon paréntesis en los lugares adecuados de la siguiente expresión, manteniendo la secuencia de números y operaciones al teclear en tu calculadora:

$$3 + 4.5 \times 20 - 2 =$$

- ¿Cuánto se paga en una mercería si se compra una aguja de \$3, 4.5 m de listón a \$20 el metro y al llegar a la caja hacen un descuento de \$2?
- ¿Cuánto se paga en una mercería si se compra una aguja de \$3 y 4.5 m de listón, cuyo precio normal es de \$20 el metro, pero sobre el que hay \$2 de descuento por metro?
- ¿Cuánto se paga en una mercería si se compran 3 m de cinta y 4.5 m de listón, cada uno de los cuales cuesta \$20 el metro, y al llegar a la caja hacen un descuento de \$2?
- ¿Cuánto se paga en una mercería si se compran 3 m de cinta y 4.5 m de listón, cada uno de los cuales cuesta \$20 el metro, pero sobre los que hay \$2 de descuento por metro?

4.06. Para resolver cada una de las siguientes situaciones, pon paréntesis en los lugares adecuados de la siguiente expresión, manteniendo la secuencia de números y operaciones al teclear en tu calculadora:

$$120 - 18 \div 5 + 30 =$$

- Mis cinco amigos y yo fuimos a tomarnos un café; la cuenta fue de \$120, pero llevábamos un cupón de descuento por \$18. Nos repartimos esa cuenta entre todos, y después compré un pastelito de \$30 para llevarle a mi mamá. ¿Cuánto debo pagar yo?
- Yo tenía \$120. Mis cinco amigos y yo compramos un refresco de \$18 y lo pagamos entre todos. Después me encontré \$30. ¿Cuánto dinero tengo?
- Yo tenía un rollo de 120 m de cuerda, de la que gasté 18 m para hacer un tendedero. El restante lo voy a usar para empacar

6 cajas azules y 30 cajas verdes, todas del mismo tamaño.
¿Cuánta cuerda usará para empacar cada caja?

- d) Yo tenía \$120. Mis cinco amigos y yo compramos un refresco de \$18 y lo pagamos entre todos. Después compré un cuaderno de \$30. ¿Cuánto dinero me queda?

4.2. NÚMEROS MUY GRANDES Y MUY CHICOS EN LA CALCULADORA

Ya vimos que cuando un número es muy grande, las calculadoras suelen escribirlo en notación científica, es decir, como un número decimal de un solo dígito distinto de 0 en la parte entera, y potencias positivas de 10.* Por ejemplo, en lugar de escribir

9,876,543,210,123,456,789

(nueve trillones, ochocientos setenta y seis mil quinientos cuarenta y tres billones, doscientos diez mil ciento veintitrés millones, cuatrocientos cincuenta y seis mil setecientos ochenta y nueve),

una calculadora suele expresar ese número así:

$9.87654321 \times 10^{18}$

Los dos números son (casi) iguales: si multiplicas 9.87654321 por 10^{18} , o sea, si corres el punto decimal 18 lugares a la derecha, obtienes el número 9876543210000000000, esto es, el número

9,876,543,210,000,000,000

(nueve trillones, ochocientos setenta y seis mil quinientos cuarenta y tres billones, doscientos diez mil millones)

que no es el número que habíamos escrito arriba, pero casi: después de todo, ¿qué son poco más de ciento veintitrés millones cuando

* El tema de las potencias de 10 se encuentra en el apartado 2.2.3 del capítulo 2 (página 136).

estamos hablando de trillones? ¡Prácticamente nada...! Cuando la calculadora escribe el número completo como $9.87654321 \times 10^{18}$, lo que está haciendo es redondearlo a los millares de millón.

Verifica cómo escribe tu calculadora un número muy grande: teclea en ella

9876543210123456789 =

y observa qué pasa.

Distintas calculadoras escriben este resultado de diversas maneras; es importante que sepas cómo lo hace la tuya. Así, algunas calculadoras no escriben $\times 10^{18}$ sino, por ejemplo, solamente 18 , sobre todo si son de modelos de hace algunos años. Sin embargo, si tu calculadora escribe 987654321 18 eso NO significa que se esté refiriendo a elevar 9.87654321 a la décima octava potencia, sino que se refiere al número $9.87654321 \times 10^{18}$.

De manera similar, cuando un número es muy pequeño, las calculadoras suelen escribirlo como un número decimal de un solo dígito distinto de 0 en la parte entera, y potencias negativas de 10. Por ejemplo, en lugar de escribir 0.0000000001234 (mil doscientos treinta y cuatro cienbillonésimos), una calculadora puede expresar ese número así

1.234 $\times 10^{-11}$

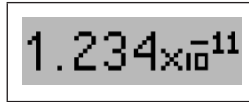
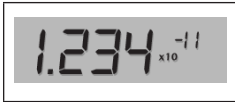
El significado de esta expresión es el siguiente: si corres el punto decimal 11 lugares *a la izquierda* (rellenando todos los espacios necesarios con ceros), obtienes el número 0.0000000001234. Verifica cómo escribe tu calculadora un número muy pequeño: teclea en ella

0.0000000001234 =

y observa qué pasa.

Algunas calculadoras no escriben $\times 10^{-11}$ sino, por ejemplo, solamente $^{-11}$. Nuevamente, si tu calculadora escribe 1.234 $^{-11}$ eso no

significa que se esté refiriendo a la resta 1.234 menos 11, ni a elevar 1.234 a la undécima potencia negativa, sino que se refiere al número 1.234×10^{-11} . Tu calculadora podría estar expresando ese número de alguna de estas maneras:



Cuando un número es muy pequeño pero la cantidad de cifras decimales todavía cabe en la pantalla de la calculadora, muchas calculadoras (como la mayoría del tipo Casio) tienen la opción de escribir el número de las dos maneras. Por ejemplo, el número 0.000012345 puede aparecer como

$$1.2345 \times 10^{-5} \quad \text{o como} \quad 0.000012345$$

Verifica de qué manera escribe tu calculadora ese número, tecleando

$$0.000012345 =$$

Si tu calculadora lo permite, tú puedes cambiar de un modo de expresión al otro. Para ello, pulsa la tecla **MODE** tantas veces como sea necesario hasta que aparezca el letrero “Norm” asociado a un número; teclea ese número y después aparecerá el letrero “Norm 1~2?”. Si tecleas 1, la expresión de este tipo de números pequeños será con potencias de diez, y si tecleas 2, será en su forma “completa”, con todos los ceros.

Si tu calculadora es tipo Casio, probablemente querrás tenerla en el modo “Norm 2”, es decir, querrás que la calculadora muestre todos los ceros. Si haces lo que se indicó arriba, cuando vuelvas a prender la calculadora seguirá en modo “Norm 2”, pero puede ocurrir que la calculadora regrese al modo en que viene de fábrica, que es el modo “Norm 1”. En ese caso, solo tienes que volver a ponerla en modo “Norm 2”, como se indicó arriba. Una explicación más detallada de estos dos modos se encuentra en las páginas 261-263.

Con los números negativos cuyo valor absoluto es muy grande, o muy pequeño, las calculadoras hacen lo mismo que con los

números positivos. Para verificar qué hace tu calculadora con este tipo de números, primero ponla en modo “Norm-1” y teclea

- $(-)\ 1234567896666666 =$
- $(-)\ 0.0000000000000000987654 =$
- $(-)\ 0.00000056789 =$

Y después ponla en modo “Norm-2” y vuelve a teclear lo mismo. Debes obtener los resultados que se indican abajo. Observa que en los dos primeros ejemplos los dos modos “normales” expresan los números de la misma manera, pero en el tercero no; la razón de ello es que ese último ejemplo es el único de los tres que sí cabe en la pantalla con todos sus ceros.

modo “Norm-1”	modo “Norm-2”
$-1.234567896 \times 10^{14}$	$-1.234567896 \times 10^{14}$
-9.87654×10^{-15}	-9.87654×10^{-15}
-5.6789×10^{-07}	-0.000000567

EJERCICIOS

Recuerda que los ejercicios con numeración par son similares a los que los preceden. Haz solamente aquellos que consideres necesarios para tu proceso de aprendizaje.

4.07. Haz las siguientes operaciones en tu calculadora, y escribe el resultado de dos maneras: sin usar potencias de 10 y con notación científica.

- a) Cuatro milésimos al cubo
- b) Veinte mil millones más doscientos millones

- c) Ochenta y cinco milésimos por veintitrés milésimos
- d) Raíz cuadrada del resultado de dividir 0.4 entre diez trillones
- e) Cuatro mil trescientos cincuenta milésimos menos cuatro mil trescientos veinticinco milésimos
- f) Setenta y cinco elevado a la quinta potencia
- g) Doscientos veinticuatro millones quinientos cincuenta y ocho mil entre dos milésimos
- h) Raíz cuadrada de quinientos cuarenta y cuatro mil seiscientos cuarenta y cuatro millones

4.08. Haz las siguientes operaciones en tu calculadora, y escribe el resultado de dos maneras: sin usar potencias de 10 y con notación científica.

- a) Cien mil doscientos cincuenta al cuadrado
- b) Trescientos cuarenta y cinco mil quinientos por ciento ochenta y cuatro mil
- c) Ciento veinticinco billones menos ciento veinticuatro billones
- d) Cuatrocientos cincuenta y siete milésimos por ciento treinta y seis mil diezmilésimos
- e) Raíz cuadrada de seis diezmillonésimos
- f) Diez mil cinco al cubo
- g) Mil doscientos treinta y cuatro entre quinientos sesenta y siete mil ochocientos noventa
- h) Novecientos setenta y cinco mil billones entre sesenta y cinco
- i) Ocho cienmilésimos entre cuatro millones
- j) Once elevado a la novena potencia
- k) Raíz cúbica de doscientos dieciséis mil
- l) Seiscientos cuarenta y cinco mil millones más quinientos noventa mil millones
- m) Siete mil ciento cincuenta y ocho diezmilésimos menos siete mil ciento cuarenta y dos diezmilésimos
- n) Cinco centésimos a la cuarta potencia
- o) Siete millones por siete mil quinientos

- p) Tres mil seiscientos cincuenta y ocho por un millón setecientos cincuenta y ocho mil veinticinco
- q) Un milésimo más un diezmilésimo
- r) Cinco cienmilésimos elevado al cubo
- s) Un millonésimo al cuadrado
- t) Un sesentavo al cubo por un ochentaicincoavo al cuadrado

4.09. Haz las siguientes operaciones en tu calculadora, y escribe el resultado de dos maneras: sin usar potencias de 10 y con notación científica.

- a) Cinco mil unidades diez centésimos al cuadrado
- b) Cinco mil diez centésimos al cuadrado
- c) Quinientos cuarenta y cinco mil millones trece menos un billón
- d) Menos setecientos siete por siete billonésimos
- e) El cubo de lo que resulta al restarle uno a sesenta milésimos

4.10. Haz las siguientes operaciones en tu calculadora, y escribe el resultado de dos maneras: sin usar potencias de 10 y con notación científica.

- a) La suma de menos cuatrocientos cuatro décimos y menos cuatrocientos cuatro centésimos
- b) Treinta mil treinta diezmillonésimos más treinta mil treinta milésimos
- c) Menos doscientos cincuenta mil millonésimos entre veinte mil
- d) Raíz cuadrada de dieciséis mil dieciséis
- e) Menos cuatrocientas unidades cuatrocientos milésimos elevado al cuadrado

4.3. CÁLCULO DE FÓRMULAS UTILIZANDO LA CALCULADORA

En los primeros cinco apartados de esta sección te haremos algunas recomendaciones para calcular fórmulas, y te propondremos muchos ejercicios para que vayas adquiriendo confianza en el uso de tu calculadora. El último apartado contiene una descripción de otras teclas y funciones de la calculadora.

4.3.1. Preparar y efectuar el cálculo

Cuando veas una fórmula con literales y operaciones, debes convertirla en un cálculo con números. A continuación, te propondremos una serie de pasos para llevarlo a cabo y encontrar el resultado correcto, pero antes de ello conviene hacer algunas reflexiones.

- Si te resulta complicado saber cuándo en una fórmula las letras se deben sustituir por números y cuándo no, te recomendamos que consultes el capítulo 3.
- Recuerda que la multiplicación puede indicarse de varias maneras, y una de ellas es la ausencia de signo. Por ejemplo, todas estas expresiones significan que hay que multiplicar *a* por *b*: axb , ab , $a \cdot b$, $a(b)$, $(a)(b)$. Además, expresiones como $3c$, $5\sqrt{d+e}$ o $g\frac{h}{m+n}$ significan, respectivamente, que hay que multiplicar 3 por *c*, 5 por la raíz de la suma de *d* y *e*, o *g* por el cociente de *h* entre la suma de *m* y *n*. En todas estas expresiones hay una multiplicación, pero esa operación está implícita. Para evitar confusiones, hay veces que es necesario hacerla explícita para la calculadora. Por ejemplo, si en el primer caso $a=2$ y $b=4$, aunque la fórmula indique ab , si nosotros tecleamos 24 la calculadora va a registrar el número veinticuatro y no la operación 2×4 ; tenemos entonces que teclear una de estas opciones:

$$2 \times 4 = , \quad 2 (4) = , \quad (2) (4) = ,$$

de las cuales la más cómoda suele ser la primera. Esta explicación no es necesaria cuando hay algún símbolo que separa los dos números. Por ejemplo si queremos calcular $7\sqrt{9}$, podemos teclear indistintamente

$$7 \sqrt{9} = , \quad 7 \times \sqrt{9} = , \quad 7 (\sqrt{9}) = , \\ (7) (\sqrt{9}) = ,$$

aunque en general la opción más cómoda es la primera.*

- No olvides que para elevar al cuadrado conviene usar la tecla x^2 .
- Ten presente, también, que en una fórmula cualquiera de los tres símbolos: $/$ $\div$ o la raya de fracción se refieren a una división y corresponden a la tecla $\div$. Si la división está expresada con una raya de fracción, la tecla $\div$ se debe pulsar después del numerador y antes del denominador.

Ahora sí, te proponemos que realices los siguientes pasos. Primero vas a “preparar” la fórmula y después harás el cálculo. Para “prepararla”:

- Agrega los signos “por” (x) cuando sea necesario. Cuando después de una división hay una multiplicación marcada por paréntesis, es necesario escribir el signo x antes del paréntesis. Por ejemplo, para multiplicar el resultado de doce cuartos por seis, es decir $\frac{12}{4} (6)$, no basta con indicarle a la calculadora

~~$$12 \div 4 = 6) =$$~~

porque entonces la calculadora registra que le estás pidiendo que divida doce entre el resultado de 4 por 6. Es necesario que le indiques

* Algunas calculadoras, sobre todo las fabricadas hace algunos años, no reconocen ni los paréntesis ni la raíz entre dos números como indicación de que se debe multiplicar. En ellas siempre es necesario usar el signo x.

$$12 \div 4 \times (6) =$$

o directamente

$$12 \div 4 \times 6 =$$

Verifica con tu calculadora estas tres operaciones.

- Sustituye las letras por los valores numéricos que tomen en el caso que estés trabajando. Si alguna parte del cálculo te resulta muy fácil, hazla mentalmente y en su lugar escribe el resultado correspondiente.
- Añade todos los pares de paréntesis que se necesiten. Puedes usar muchos pares, incluso unos dentro de otros (el número de “niveles” que puedes usar depende de la calculadora, pero en general te van a resultar suficientes). Recuerda que:
 - Si se está operando con algún número negativo, recomendamos ponerlo entre paréntesis.
 - Si arriba o debajo de una raya de fracciones hay operaciones, debes encerrarlas entre paréntesis. Una excepción es cuando arriba o debajo hay una sola operación consistente en una raíz cuadrada, como en el tercer ejemplo más adelante.
 - Si dentro de un signo $\sqrt{}$ de raíz hay operaciones, debes encerrarlas entre paréntesis.
 - Los pares de paréntesis deben estar completos, es decir, todos los que se abran deben cerrarse.

Una vez que hayas “preparado” así tu fórmula, haz el cálculo:

- Lee con cuidado y de izquierda a derecha la expresión, teclando cada operación cuando se indica.
- Al final teclea el signo $=$

A continuación veremos seis ejemplos de cálculos. Nosotras iremos poniendo de uno en uno los pares de paréntesis hasta dejar “preparada” la fórmula, lo que señalaremos con fondo verde. Además,

escribiremos en un renglón la expresión extendida para que puedas repetir el cálculo en tu calculadora. Sin embargo, lo ideal es que tú pongas los paréntesis y los signos necesarios sobre la misma fórmula, y que leyendo esa fórmula preparada teclees de corrido, sin escribir en papel las teclas que debes pulsar. Te hacemos esta recomendación para disminuir el riesgo de que cometas un error al copiar la expresión.

Primer ejemplo. Empecemos con un cálculo sencillo, para ver el caso de las operaciones con números negativos en la calculadora. Supongamos que debemos calcular esta fórmula:

$$(5 - x)^2 + \sqrt{19 + z} \quad (a)$$

Y que para ello sabemos que $x = -2$ y $z = -3$.

- Antes de sustituir por los valores numéricos, observamos que no hay multiplicaciones implícitas. Dado que tanto x como z toman valores negativos, al sustituir ponemos esos números entre paréntesis. La expresión que tenemos que calcular es:

$$(5 - (-2))^2 + \sqrt{19 + (-3)}$$

- El único par de paréntesis que tenemos que agregar es para la operación dentro de la raíz; aquí usamos corchetes para distinguirlos de los otros

$$(5 - (-2))^2 + \sqrt{[19 + (-3)]} \quad (b)$$

- La expresión (b) está lista para teclear. Antes de ello, sin embargo, recordemos que el signo $-$ antes del 2 y del 3 es para indicar que el número es negativo, y no se trata de una operación, por lo que en la calculadora usamos la tecla $(-)$. Entonces tecleamos:

$$(5 - (-2))^2 + \sqrt{19 + (-3)} = \quad (c)$$

- Teclea en tu calculadora la operación directamente desde la expresión (b), y verifica que el resultado es 53. **Nota:** Nosotras hemos escrito aquí la expresión (c) para que tú puedas ver cómo se teclea en la calculadora la expresión preparada (b). Te recomendamos que no la copies, sino que aprendas a ejecutar esas acciones leyendo la fórmula preparada. Lo mismo haremos en los siguientes ejemplos.

Segundo ejemplo. Supongamos que debemos calcular

$$\frac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}} \quad (d)$$

y que sabemos que en nuestro caso particular $\bar{x}=53.74$, $\mu=33.5$, $s=9.42$ y $n=18$.

- No hay multiplicaciones implícitas, por lo que directamente sustituimos, y entonces lo que debemos calcular es:

$$\frac{53.74 - 33.5}{9.42 / \sqrt{18}}$$

- Ponemos paréntesis para las operaciones arriba y debajo de la raya principal:

$$\frac{(53.74 - 33.5)}{(9.42 / \sqrt{18})} \quad (e)$$

- La expresión (e) está lista para teclear. Es equivalente a:

$$(53.74 - 33.5) \div (9.42 \div \sqrt{18})$$

- Podemos, entonces, teclear así:

$$(53.74 - 33.5) \div (9.42 \div \sqrt{18}) = \quad (f)$$

- Teclea en tu calculadora la operación leyendo de corrido la expresión (e), y verifica que el resultado es 9.115822453

Tercer ejemplo. Calculemos:

$$\frac{r}{\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}} \quad (g)$$

Y supongamos que $r = -0.6$ y $n = 18$.

- Observamos que no hay multiplicaciones explícitas y ponemos entre paréntesis el valor negativo de r . Si simplemente sustituimos, obtenemos:

$$\frac{(-0.6)}{\sqrt{\frac{1-(-0.6)^2}{18-2}}}$$

- Pero podemos reemplazar la operación $18 - 2$ por su resultado. Esto lo podemos hacer porque la operación es muy sencilla y solamente involucra números enteros; al hacer esto nos ahorramos algunos paréntesis.

$$\frac{(-0.6)}{\sqrt{\frac{1-(-0.6)^2}{16}}}$$

- La principal operación es una división, señalada con la raya de fracción. Arriba de ella no hay operaciones, y abajo sí, todas ellas dentro de la raíz cuadrada. Como esta raíz cuadrada es la única operación indicada en el denominador, no es necesario poner la raíz cuadrada dentro de un par de paréntesis, pero sí es necesario que las operaciones dentro de la raíz cuadrada vayan entre paréntesis; aquí usamos corchetes para distinguir unos de otros:

$$\frac{(-0.6)}{\sqrt{\left[\frac{1-(-0.6)^2}{16}\right]}}$$

- Dentro de los corchetes hay una raya, arriba de la cual también hay operaciones, por lo que debemos ponerlas entre paréntesis; aquí usamos llaves para distinguir unos de otros.

$$\frac{(-0.6)}{\sqrt{\left[\frac{\{1 - (-0.6)^2\}}{16}\right]}} \quad (h)$$

- La expresión (h) está lista para teclear. Es equivalente a:

$$(-0.6) \div \sqrt{\left[\frac{\{1 - (-0.6)^2\}}{16}\right]}$$

- Por lo que tecleamos:

$$\left((-) 0.6 \right) \div \sqrt{\left(\left(1 - \left((-) 0.6 \right) \times \right) \div 16 \right)} = \quad (i)$$

- Teclea de corrido en tu calculadora la operación leyéndola desde la expresión (h), y verifica que el resultado es -3.

Cuarto ejemplo. Calculemos la expresión:

$$d - k \sqrt{7 + \frac{d_0}{p + q^2}} \quad (j)$$

Y supongamos que $d_0 = 56.2$, $d = 53.4$, $k = 15$, $p = 3.54$ y $q = 6.2$.

- Al sustituir tenemos:

$$53.4 - 15 \sqrt{7 + \frac{56.2}{3.54 + 6.2^2}}$$

- Observa que hay una multiplicación implícita: 15 por la raíz, pero como la mayoría de las calculadoras reconoce esta multiplicación así, no es necesario escribir x. Ahora bien, como la raíz agrupa operaciones, las encerramos con paréntesis:

$$53.4 - 15 \sqrt{\left(7 + \frac{56.2}{3.54 + 6.2^2}\right)}$$

- Dentro de la raíz hay una raya de fracciones que no tiene operaciones arriba, pero sí abajo, y deben ser agrupadas con un paréntesis; aquí usamos corchetes para distinguir unos de otros:

$$53.4 - 15 \sqrt{\left(7 + \frac{56.2}{[3.54 + 6.2^2]}\right)} \quad (k)$$

- La expresión (k) está lista para teclear. Es equivalente a:

$$53.4 - 15\sqrt{(7 + 56.2 \div [3.54 + 6.2^2])}$$

- Podemos, entonces, teclear así:

$$53.4 - 15 \sqrt{(7 + 56.2 \div (3.54 + 6.2 \times^2))} = \quad (l)$$

- Teclea de corrido en tu calculadora la operación leyéndola directamente desde la expresión (k), y verifica que el resultado es 10.08470404.

Quinto ejemplo. Hagamos el siguiente cálculo estadístico:

$$\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \quad (m)$$

Y supongamos que tenemos esta información:

$n_1=22$	$n_2=18$
$\bar{x}_1=56$	$\bar{x}_2=61.1$
$s_1=6.8$	$s_2=5.3$

- Al sustituir, tenemos:

$$\frac{56 - 61.1}{\sqrt{\frac{(22 - 1)6.8^2 + (18 - 1)5.3^2}{22 + 18 - 2}}} \sqrt{\frac{1}{22} + \frac{1}{18}}$$

- Las dos restas $22 - 1$ y $18 - 1$ se pueden hacer mentalmente. Sin embargo, no podemos poner $21 \cdot 6.8^2$ sin indicarle a la calculadora qué operación debe hacer con 21 y 6.8^2 , por lo que hacemos explícitas las multiplicaciones:

$$\frac{56 - 61.1}{\sqrt{\frac{21 \times 6.8^2 + 17 \times 5.3^2}{22 + 18 - 2}}} \sqrt{\frac{1}{22} + \frac{1}{18}}$$

- Después ponemos paréntesis para las operaciones arriba y debajo de la raya principal:

$$\frac{(56 - 61.1)}{\left(\sqrt{\frac{21 \times 6.8^2 + 17 \times 5.3^2}{22 + 18 - 2}} \sqrt{\frac{1}{22} + \frac{1}{18}} \right)}$$

- El numerador ya está listo, pero en el denominador tenemos dos raíces y cada una incluye varias operaciones, así que las agrupamos con paréntesis; aquí usamos corchetes para distinguir unos de otros:

$$\frac{(56 - 61.1)}{\left(\sqrt{\left[\frac{21 \times 6.8^2 + 17 \times 5.3^2}{22 + 18 - 2} \right]} \sqrt{\left[\frac{1}{22} + \frac{1}{18} \right]} \right)}$$

- En la primera raíz hay una raya con operaciones arriba y abajo que también debemos agrupar con paréntesis; aquí usamos llaves para distinguirlos de los otros. Observa que en la segunda raíz ya no es necesario poner más paréntesis porque, aunque hay rayas de división, estas no tienen operaciones ni arriba ni abajo.

$$\frac{(56 - 61.1)}{\left(\sqrt{\left[\frac{\{21 \times 6.8^2 + 17 \times 5.3^2\}}{\{22 + 18 - 2\}} \right]} \sqrt{\left[\frac{1}{22} + \frac{1}{18} \right]} \right)} \quad (n)$$

- La expresión (n) está lista para teclear. Es equivalente a:

$$(56 - 61.1) \div \left(\sqrt{\left[\{21 \times 6.8^2 + 17 \times 5.3^2\} \div \{22 + 18 - 2\} \right]} \sqrt{\left[1 \div 22 + 1 \div 18 \right]} \right)$$

- Así es como tecleamos:

$$\left((56 - 61.1) \div \left(\sqrt{\left(\left(21 \times 6.8^2 + 17 \times 5.3^2 \right) \div \left(22 + 18 - 2 \right) \right)} \sqrt{\left(1 \div 22 + 1 \div 18 \right)} \right) \right) = \quad (o)$$

- Teclea de corrido en tu calculadora la operación leyéndola desde la expresión (n), y verifica que el resultado es -2.599021238.
- Nota:** Una manera un poco más corta de hacer el cálculo de $\sqrt{\frac{1}{22} + \frac{1}{18}}$ aparece en la página 265.

Sexto ejemplo. Calculemos la expresión

$$\sqrt{\frac{12 + \frac{3(\psi - d)^2 - b}{i + y}}{h - \frac{a}{j}} - \omega} \quad (p)$$

- Si sustituimos por los valores conocidos $a=6.1$, $b=1.3$, $d=-2.6$, $h=3.7$, $i=6$, $j=7.2$, $y=4.3$, $\psi=5$ y $\omega=1.6$, obtenemos:

$$\sqrt{\frac{12 + \frac{3(5 - (-2.6))^2 - 1.3}{6 + 4.3}}{3.7 - \frac{6.1}{7.2}} - 1.6}$$

- Colocamos paréntesis para agrupar todo lo que va dentro de la raíz:

$$\sqrt{\left(\frac{12 + \frac{3(5 - (-2.6))^2 - 1.3}{6 + 4.3}}{3.7 - \frac{6.1}{7.2}} - 1.6\right)}$$

- Después ponemos paréntesis para las operaciones arriba y debajo de la raya principal de fracción; aquí usamos corchetes para distinguir unos de otros:

$$\sqrt{\left(\frac{\left[12 + \frac{3(5 - (-2.6))^2 - 1.3}{6 + 4.3}\right]}{\left[3.7 - \frac{6.1}{7.2}\right]} - 1.6\right)}$$

- Ahora hacemos lo mismo con las operaciones arriba y debajo de la otra raya de fracción; aquí usamos llaves:

$$\sqrt{\left(\frac{\left[12 + \frac{\{3(5 - (-2.6))^2 - 1.3\}}{\{6 + 4.3\}}\right]}{\left[3.7 - \frac{6.1}{7.2}\right]} - 1.6\right)} \quad (q)$$

- La expresión (q) está lista para teclear. Es equivalente a:

$$\sqrt{([12 + \{3(5 - (-2.6))\}^2 - 1.3] \div \{6+4.3\}) \div [3.7 + 6.1 \div 7.2] - 1.6}$$

- Podemos ahora teclear:

(r)

- Teclea de corrido en tu calculadora la operación leyéndola desde la expresión (q), y verifica que el resultado es 2.908496009

4.3.2. Hacer el cálculo de corrido

Tal vez los ejemplos que hemos puesto te puedan parecer complicados y prefieras ir haciendo los cálculos “paso a paso”, apuntando cada vez los resultados de cada una de las operaciones. Nosotras te recomendamos que NO lo hagas así: No apuntes resultados intermedios; lo deseable es que realices el cálculo de corrido en la calculadora con todos sus pasos, utilizando los paréntesis, como indicamos en el apartado anterior.

Esta recomendación obedece a dos razones. La primera es que cuando uno copia resultados y los vuelve a teclear en la calculadora, aumenta la probabilidad de cometer un error de tecleo. La segunda es que, al ir realizando la mayoría de las operaciones, necesariamente requerirían un redondeo y esto implicaría que se vaya acumulando un error.

4.4. POR QUÉ ES MEJOR HACER DE CORRIDO LAS OPERACIONES Y NO CON RESULTADOS PARCIALES

Veamos con un ejemplo qué puede ocurrir cuando se hacen las operaciones directamente y cuando se hacen “paso a paso” registrando resultados intermedios.

Supongamos que tenemos que hacer el siguiente cálculo:

$$\frac{\sqrt{\frac{.032}{.075^2}} \times \sqrt{\frac{.128}{0.24^2}}}{\sqrt{\left(\frac{.069}{12.5}\right)^2 + \left(\frac{.044}{6.31}\right)^2}} \quad (s)$$

Para preparar el cálculo como lo hicimos en el apartado 4.3.1, ponemos primero los paréntesis necesarios:

$$\frac{\sqrt{\left[\frac{.032}{.075^2}\right]} \times \sqrt{\left[\frac{.128}{0.24^2}\right]}}{\sqrt{\left[\left(\frac{.069}{12.5}\right)^2 + \left(\frac{.044}{6.31}\right)^2\right]}} \quad (t)$$

Como la expresión (t) está lista para la calculadora, tecleamos:

$$\left(\sqrt{ \left(.032 \div .075 \times^2 \right) } \times \sqrt{ \left(.128 \div .24 \times^2 \right) } \right) \div \sqrt{ \left(\left(.069 \div 12.5 \right) \times^2 + \left(.044 \div 6.31 \right) \times^2 \right) } = \quad (u)$$

Verifica que el resultado de esta operación es **399.7936071** (v)

Ahora veamos qué ocurre con la expresión (s) cuando hacemos el cálculo “paso a paso”, es decir, operación por operación y registrando los resultados. Como esta forma hace que se acumulen errores, la hemos tachado, pero puedes seguirla para entender por qué no es conveniente hacer el cálculo “paso a paso”.

~~A partir de la expresión (s), empezamos calculando los cuadrados del numerador y aproximamos los resultados (por redondeo). Así tenemos $.075 \times^2 = .006$ y $.24 \times^2 = .06$. Además calculamos las dos divisiones que van dentro de la raíz del denominador; ahí tenemos $.069 \div 12.5 = .006$ y $.044 \div 6.31 = .007$. Ahora la expresión (q) se convierte en~~

$$\frac{\sqrt{\frac{.032}{.006}} \times \sqrt{\frac{.128}{.06}}}{\sqrt{.006^2 + .007^2}} \quad (w)$$

Si calculamos los cocientes, tenemos $.032 \div .006 = 5.3$ y $.128 \div .06 = 2.1$, y si calculamos los cuadrados tenemos $.006^2 = .00004$ y $.007^2 = .00005$. Ahora sumamos $.00004 + .00005 = .00009$, y nuestra expresión (w) se ha transformado en:

$$\frac{\sqrt{5.3} \times \sqrt{2.1}}{\sqrt{.00009}} \quad (x)$$

Calculamos las tres raíces $\sqrt{5.3} = 2.3$, $\sqrt{2.1} = 1.4$ y $\sqrt{.00009} = .009$; tenemos entonces la expresión (y) al final del cálculo “paso a paso”:

$$\frac{2.3 \times 1.4}{.009} = \frac{3.22}{.009} = 357.78 \quad (y)$$

Como puedes observar, en este ejemplo el cálculo “paso a paso” nos llevó a un resultado incorrecto: hay una diferencia de 42.01 entre el resultado correcto (v) y el que encontramos (y): ¡más de 10% de error!

El error se debe a todas las aproximaciones por redondeo que fuimos haciendo. Ésa es la razón por la que hemos tachado este ejemplo: no es correcto hacer los cálculos “paso a paso”.

4.3.3. Redondear el resultado final

Como hemos visto, ir haciendo las operaciones y apuntando los resultados intermedios no es correcto; ni siquiera redondeando esos resultados intermedios (¡y sería todavía peor si no se redondeara, es decir, si los números simplemente se truncaran!). Sin embargo, una vez que se llega al resultado final sí hay que redondearlo, habiendo decidido cuántas cifras decimales se van a utilizar.

Veamos en nuestros seis ejemplos cómo se puede redondear el resultado final.

Primer ejemplo. El resultado era 53. Este número no requiere ser redondeado: queda en 53

Segundo ejemplo. Habíamos llegado al resultado 9.115822453. Si decidimos utilizar tres cifras decimales, lo redondeamos a 9.116

Tercer ejemplo. El resultado era -3 . Este número no requiere ser redondeado: queda en -3

Cuarto ejemplo. Habíamos llegado al resultado 10.08470404. Si decidimos utilizar dos cifras decimales, lo redondeamos a 10.08

Quinto ejemplo. Habíamos llegado al resultado -2.599021238 . Si decidimos utilizar dos cifras decimales, lo redondeamos a -2.60

Sexto ejemplo. El resultado era 2.908496009. Si lo queremos expresar con una cifra decimal, tenemos 2.9

4.3.4. Estimar

Una recomendación de carácter general: cuando hagas operaciones aritméticas, pregúntate si el resultado tiene sentido, si es verosímil. Procura no resolver los problemas de manera mecánica, sino “echarte un clavado” en la situación que se presenta, y ver si el resultado es creíble.

Por ejemplo, imagina que al convertir 120 kilómetros en metros el resultado te sale 0.12 m en lugar de 120,000 m (es decir, que en vez de multiplicar por 1000 cometes el error de dividir entre 1000, una equivocación que nos puede ocurrir a todos). Si realizas la operación de manera mecánica, metiendo los números a la calculadora y leyendo el resultado, no te vas a dar cuenta del garrafal error. Pero si te haces una idea de cuánto son 120 kilómetros (digamos, como de Cuautitlán a Cuernavaca) y tratas de imaginar cuántos metros

caben en esa distancia, te va a parecer raro que sea menos de uno, ¿verdad? Imagina cuántas reglas de un metro podrías alinear entre Cuautitlán y Cuernavaca. Muchísimas, ¿no? Varios miles: de hecho, 120 km son efectivamente ciento veinte mil metros. Si haces ese esfuerzo de imaginación, el resultado 0.12 te va a parecer raro y vas a volver a pensar en lo que estás haciendo.

La recomendación es, entonces, la siguiente: cuando realices un cálculo trata de anticipar aproximadamente cuánto va a ser el resultado. Esto te permitirá ir poco a poco mejorando tus intuiciones, y también cometerás menos errores.

Veamos algunos ejemplos:

- Supongamos que tenemos que calcular el promedio de tres calificaciones: 6, 7 y 9. La operación que hay que hacer es $\frac{6+7+9}{3}$, y por lo tanto lo que hay que teclear es

$$(6 + 7 + 9) \div 3 = ,$$

y se obtiene el resultado 7.33. Se podría cometer el error de no ponerle paréntesis a la operación arriba de la raya, en cuyo caso el resultado sería 9.7. Sin embargo, si tenemos claro que se trata de un promedio de tres números y que por lo tanto no puede ser ni menor que el más pequeño de los tres ni mayor que el más grande, el resultado 9.7 nos debe llamar la atención y hacernos ver que algo hicimos mal.

- Imaginemos que en el supermercado compramos un paquete de ate que cuesta \$45.90, una botella de vinagre marcada en \$12.90 que tiene \$1.70 de descuento y tres paquetes de galletas de \$22.50. Conviene llegar a la caja sabiendo más o menos cuánto nos van a cobrar. Por el ate, \$45.90 es casi \$46, por el vinagre poco más de \$11, y por las galletas como \$66, por lo que la cuenta total debe estar entre \$120 y \$130. Si el cajero nos presenta una nota de \$148.80 tendremos razón en reclamar: en este caso nos cobró 4 paquetes de galletas y no consideró el descuento en el vinagre.

En las operaciones aritméticas descontextualizadas, como las de los seis ejemplos del apartado 4.3.1, estos ejercicios de estimación solo son factibles cuando los cálculos no son muy complicados.

4.3.5. Recomendaciones adicionales acerca de los cálculos

Es frecuente que los estudiantes de ciencias sociales reporten que cuando hacen los ejercicios con el profesor entienden bien, pero cuando los quieren hacer solos ya no obtienen los resultados correctos. Las recomendaciones que te hemos hecho en los cuatro apartados anteriores pueden ayudarte a que eso no te ocurra, y aquí anotamos algunas más.

- Aunque te hemos recomendado no hacer los cálculos “paso a paso”, puede ocurrir que te interese llevar un registro de los resultados parciales, porque después podrías preguntarte: “¿y ese número, de dónde salió?”. Cuando hagas eso, y sobre todo pensando en que lo vas a querer consultar después (por ejemplo, al hacer ejercicios para preparar un examen), **no escribas el signo igual entre números que no son iguales**. Esto sucede con frecuencia cuando se hacen cálculos paso a paso. Aquí vamos a poner un ejemplo muy sencillo, para que resulte claro lo que queremos ilustrar. Digamos que tienes que calcular $2 \times 3 + 4$. El resultado, obviamente, es $6 + 4 = 10$. Podría ocurrir que pensaras algo como: “¿Dos por tres? –Seis–; ¿Más cuatro? –Diez–”, lo cual es un razonamiento correcto, pero si acompañas ese razonamiento con esta escritura:

$$\cancel{2 \times 3 = 6 + 4 = 10},$$

estarías escribiendo que 2×3 es 10!, lo cual, obviamente, es falso (y es la razón por la cual hemos tachado esa escritura). Cuando quieras usar tus apuntes para estudiar te vas a preguntar, con justa razón: “¿y ese número 10, de dónde salió?”. Si quieres llevar un registro de que para calcular $2 \times 3 + 4$

primero efectúas la multiplicación 2×3 y luego sumas 4, te proponemos dos maneras en las que no ocurre el error mencionado:

- $2 \times 3 + 4 = 6 + 4 = 10$
- $2 \times 3 + 4 \rightarrow 2 \times 3 = 6 \rightarrow + 4 \rightarrow 10$

- **Tampoco escribas el signo igual entre números que corresponden a distintas clases de cantidades.** Suele ocurrir que se utilicen tablas para relacionar dos tipos de cantidades distintas. Esto es habitual en Estadística, pero también en otras aplicaciones matemáticas. Por ejemplo, observa la tabla de junto, que

Personas	Yemas
2	3
4	6
8	12

reporta cuántas yemas de huevo se deben utilizar para hacer cierto postre, según la cantidad de comensales. Imagina que queremos preparar postre para 10 personas y que nos preguntamos cuántas yemas necesitaremos. Podríamos pensar algo como: “Diez personas es lo mismo que dos –que llevan 3 yemas– más ocho –que llevan 12 yemas–, o sea que necesito 15 yemas”, y sería correcto, pero no sería correcto acompañar ese modo de pensar con una escritura como la siguiente:

$$\underline{10 = 2 = 3 + 8 = 12 = 15}$$

Porque estaríamos diciendo que 10, 2, 12 y 15 son números iguales, lo cual es incorrecto. Te proponemos dos maneras en las que no ocurre ese error, para que uses la que te parezca más conveniente:

- $10 = 2 + 8 \rightarrow 3 + 12 = 15$
- $10 = 2 + 8$
 $\downarrow \quad \downarrow$
 $3 + 12 = 15$

4.3.6. Otras teclas y funciones de la calculadora científica

Ahora haremos algunos comentarios generales sobre otras funciones que suelen tener las calculadoras. Es posible que tú encuentres que con lo que hemos explicado hasta ahora te basta para manejar tu calculadora y que no quieres más información que te podría resultar innecesaria: en ese caso, simplemente pasa a los ejercicios. Pero si te han causado curiosidad algunas de las teclas de tu calculadora, podrías encontrar interesantes los siguientes párrafos.

Basaremos los comentarios en las calculadoras tipo Casio que se encuentran actualmente en el mercado, pero con las siguientes salvedades:

- No todas las calculadoras tipo Casio tienen todas las funciones que mencionaremos aquí, o no con esa terminología.
- Hay calculadoras tipo Casio que tienen otras funciones además de las que mencionaremos aquí.

Sea como fuere, incluso si tu calculadora es Casio, te recomendamos enfáticamente **consultar el instructivo**.

Cómo corregir errores

- La mayoría de las calculadoras científicas actuales tienen manera de ver qué cálculos se le indicaron a la calculadora y de corregir errores que se hayan cometido al teclear. Supongamos, por ejemplo, que al hacer la suma $5.6 + 2.31$ te equivocas y no pones el segundo punto decimal, sino que tecleas $5.5 + 231 =$. Entonces obtienes el resultado 236.6. Si habías anticipado que el resultado debería estar entre 7 y 8, el resultado 236.6 te muestra que algo hiciste mal. En las calculadoras tipo Casio suele haber cuatro flechitas justo debajo de la pantalla, a veces impresas sobre una tecla redonda gris.

Si ahí pulsas varias veces la flecha de la izquierda, en el primer renglón de la pantalla aparece, sucesivamente:

5.5+231_

5.5+23_ alternado con 5.5+231

5.5+2_1 alternado con 5.5+231

Ahí está el error: después del 2 debía ir un punto. Si ahora tecleas el punto lo que ves es

5.5+2._ alternado con 5.5+2.1

y si tecleas 31 ves

5.5+2.31_

Ya corregiste el error. Ahora teclea  y observa que el resultado es 7.91

- Hay otras maneras de borrar lo que uno tecleó por error. Dos de ellas son las teclas

 y .

(que en algunas calculadoras aparecen como  y )

- La primera borra solo lo que se acaba de escribir, mientras que la segunda borra toda la operación. Consulta tu instructivo.

Aquí hemos mencionado tres maneras que tienen algunas calculadoras para corregir errores, pero es posible que tu calculadora tenga otras maneras. Por ello es muy importante que para saber cómo funciona en este aspecto (y en otros) consultes el instructivo.

La tecla

La tecla  abre diversas posibilidades de manejo de la calculadora, según la cantidad de veces que se pulsa.

- Cuando tú pulsas una vez la tecla , aparecen primero los tres modos de funcionamiento:

- Con el número 1, el modo aritmético o **CONF**. Cuando estás trabajando en este modo, no aparecen en la pantalla los letreros **SD**, **RES** ni **EQN**.
 - Con el número 2, el modo estadístico o **SD**. Cuando lo eliges, aparece en la pantalla el letrero **SD**. Este modo debe resultarte muy útil en un curso de estadística.
 - Con el número 3, el modo de regresión o **RES**. Cuando lo eliges, te pregunta si la regresión que quieres es lineal (**LIN=1**), logarítmica (**LOG=2**), exponencial (**EXP=3**); la lista no termina ahí, sino que si pulsas la flecha derecha te da otras opciones de regresión. Cuando eliges alguna de ellas, aparece en la pantalla el letrero **RES**. Todo este modo de regresión puede ayudar en un curso de estadística.
- En algunas calculadoras, cuando pulsas dos veces la tecla , aparece un cuarto modo de funcionamiento:
 - Con el número 1, el modo de ecuaciones o **EQN**. Si pulsas 1, la calculadora te pregunta con este letrero: **Unknowns ?**, con cuántas incógnitas vas a trabajar (2 o 3), y luego te pregunta los valores de los coeficientes de las ecuaciones. Cuando eliges este modo, aparece en la pantalla el letrero **EQN**. Este modo te puede ser útil en algunos cursos de matemáticas.
- La siguiente vez que se pulsa la tecla , aparecen tres opciones para manejar los ángulos, lo cual resulta indispensable cuando se trabaja trigonometría, pero totalmente intrascendente cuando no es así. Los ángulos se pueden medir en grados (**Deg=1**), radianes (**Rad=2**) o grados centesimales (**Gra=3**). La calculadora siempre considera los ángulos de alguna de esas tres maneras, e indica cuál está usando mediante un pequeño letrerito en la pantalla que puede ser **Deg**, **Rad** o **Gra**, o bien **D**, **R** o **G**. Como acabamos de decir, si no vas a hacer cálculos trigonométricos, es totalmente intrascendente cuál de esas tres letras o de esos tres letreritos aparece.

- Si pulsas nuevamente la tecla , aparecen tres opciones para manejar los números:
 - Con el número 1 (**Fix**), todos los números aparecen con una cantidad fija de decimales. Tú eliges esa cantidad cuando al pulsar 1 la calculadora te pregunta **Fix 0~9?** Si pulsas, por ejemplo, 2, todos los números aparecerán redondeados a dos cifras decimales. Por ejemplo, cuando le dices a la calculadora **Fix 3**, el número π aparece como 3.142. Cuando estás trabajando en este modo, aparece en la pantalla el letrero **Fix**. (Si quieres salir de este modo, vuelve a pulsar  hasta que aparezcan las opciones **Fix**, **Sci** y **Norm**, y pulsa 3 y 2 para modo normal).
 - Con el número 2 (**Sci**), la calculadora usa la notación científica: todos los números aparecen como un número decimal con un solo dígito en las unidades, multiplicado por 10 elevado al exponente adecuado. Aquí la calculadora contempla no la cantidad de cifras después del punto decimal, como en el modo **Fix**, sino la cantidad total de cifras. Por ejemplo, en el número 6.783×10^2 , la calculadora considera que en total se tienen cuatro cifras, que son el 6, el 7, el 8 y el 3. Tú eliges la cantidad total de cifras cuando al pulsar 2 la calculadora te pregunta **Sci 0~9?** Por ejemplo, cuando le dices a la calculadora **Sci 3**, el número π aparece como 3.14×10^{00} , el número 12345.6789 aparece como 1.23×10^{04} , y el número 0.005679 aparece como 5.68×10^{-03} . Cuando estás trabajando en este modo, aparece en la pantalla el letrero **Sci**.
 - Con el número 3 (**Norm**), la calculadora usa el modo “normal” de expresar los números, pero como hemos visto, ese modo tiene dos “submodos”, que aparecen cuando pulsas 3, porque la calculadora te pregunta **Norm 1~2?** Si pulsas 1, la calculadora expresa con todas sus cifras todos los números que están

entre 0.01 y 9,999,999,999 o bien
entre -0.01 y -9,999,999,999,

pero los números fuera de ese rango los expresa en notación científica. En cambio, si pulsas **2**, los números que expresa con todas sus cifras son los que están

entre 0.000000001 y 9,999,999,999 o bien
entre -0.000000001 y -9,999,999,999

y fuera de ese rango, de nuevo utiliza la notación científica (¡simplemente porque si no, no caben en la pantalla...!). Este modo de presentación de los números ya fue explicado en nuestro manual en el capítulo 2, al hablar de potencias de 10 y de notación científica. Cuando estás trabajando en uno de los dos submodos del modo “Normal”, no aparecen en la pantalla los letreros **Fix** ni **Sci**.

En resumen, los dos submodos de **Norm** manejan de la misma manera números grandes en valor absoluto y solo usan la notación científica para denotar los que no caben en la pantalla, mientras que los números muy cercanos a cero son manejados con todos sus ceros (si caben en la pantalla) en el submodo **Norm-2** y en notación científica en el submodo **Norm-1**.

Veamos entonces con algunos ejemplos cómo expresa una calculadora diversos números en los modos y submodos recién descritos; en el caso de los modos **Fix** y **Sci** hemos elegido 3 cifras. Comprueba estos resultados con tu calculadora (simplemente, en cada modo teclea el número o la operación y luego teclea ).

Número	Modo Fix-3	Modo Sci-3	Submodo Norm-1	Submodo Norm-2
56.4726	56.473	5.65×10^{01}	56.4726	56.4726
-89635.1	-89635.100	-8.96×10^{04}	-89635.1	-89635.1
$0-0.000003^2$	0.000	-9.00×10^{-12}	-9×10^{-12}	-9×10^{-12}
888000^2	7.88544×10^{11}	7.89×10^{11}	7.88544×10^{11}	7.88544×10^{11}
$(-0.05)^2$	0.003	2.50×10^{-03}	2.5×10^{-03}	0.0025
77777^2	6049261729	6.05×10^{09}	6049261729	6049261729
0.253^2	0.064	6.40×10^{-02}	0.064009	0.064009

Observa que la calculadora escribe los exponentes menores de 10 con un cero a la izquierda; por ejemplo, cuando nosotros escribimos 10^5 , en la pantalla de la calculadora aparece 10^{05}

- En las calculadoras que manejan fracciones, si pulsas una vez más la tecla **MODE**, aparece el letrero **Disp** con el número 1 (en inglés “display” quiere decir “presentación”), y ahí te permite elegir entre fracciones mixtas (**ab/c=1**) y propias o impropias (**d/c=2**). Para escribir fracciones en estos formatos se usa la tecla **a b/c**; debes consultar el instructivo para ver cómo hacer eso. Finalmente a la derecha de (**d/c=2**) aparecen otras dos opciones, según si quieres que la separación decimal (es decir, entre unidades y décimos) sea un punto (**Dot=1**) o una coma (**Comm=2**). Como tú sabes, en México se usa punto.

La memoria **M+**

La mayor parte de las calculadoras científicas tienen para el modo aritmético una memoria a la que se accede con la tecla **M+**. La misma tecla se usa ampliamente en los modos estadístico y de regresión, pero aquí nos ocuparemos solamente del uso de esa memoria en el modo aritmético.

Cuando la memoria está siendo utilizada aparece en la pantalla la letra **fl**. Hay dos maneras de guardar información en la memoria

y una manera de ver lo que contiene, que vamos a ver en seguida. Al final veremos cómo borrar el contenido de la memoria.

- La memoria puede funcionar como “memoria aditiva”, esto es, sumando todo lo que se le meta con la tecla **M+**. Si la memoria está vacía (es decir, no aparece la letra **fl** en la pantalla) y pulsas **5** **M+** y luego **3.7** **M+**, al final el contenido de la memoria será el número 8.7
- Si deseas guardar un número en la memoria sustituyendo el contenido anterior, debes pulsar las dos teclas **STO** **M+**

Nota: Como se explicó en la presentación del manual, aquí hablaremos de la tecla **STO**, con independencia de si funciona directamente o con el uso previo de **SHIFT**.

Por ejemplo, para guardar el número de teléfono de Locatel, pulsa **5556581111** **STO** **M+**. Aunque hayas tenido guardado ahí el número 8.7, lo que hay ahora es el número 5556581111

- Para ver lo que tiene la memoria pulsa las dos teclas **RCL** **M+**
- Para operar con el número que está en la memoria, algunas calculadoras exigen que después de la combinación **RCL** **M+** teclees también el signo **=**, mientras que otras funcionan directamente con las dos teclas mencionadas. Es decir, dependiendo de la calculadora, para operar con lo que hay en la memoria se pulsa una de las dos siguientes combinaciones:

RCL **M+** o **RCL** **M+** **=**

- Para limpiar la memoria y dejarla en blanco (o “en ceros”) lo que se hace es guardarle, justamente, un cero. Es decir, se pulsa la combinación

fl **STO** **M+**

Observa que cuando haces esto se borra de la pantalla la letra **fl**.

Otras teclas

No vamos a hablar aquí de todas las teclas que pueden tener las calculadoras científicas, pero mencionaremos las que pensamos que con mayor probabilidad pueden servirte a ti, como estudiante de ciencias sociales.

- Las teclas para calcular potencias que no sean el cuadrado, así como raíces que no sean la raíz cuadrada; es decir, las teclas x^2 , x^y o $x^\wedge$ además de $\sqrt[3]{}$ y $\sqrt[n]{}$, fueron explicadas en el capítulo 2. Algunas calculadoras, en vez de la tecla x^y cuentan con una tecla $x^\square$ que funciona igual que x^y
- Muchas calculadoras tienen una o dos maneras de calcular potencias de 10. Una es con la tecla 10^x . Otra es con la tecla EXP . Por ejemplo, tanto $5 \ 10^x \ 3 \ =$ como $5 \ \text{EXP} \ 3 \ =$ dan el resultado $5 \times 10^3 = 5,000$, y tanto $4 \ 10^x \ (-) \ 2 \ =$ como $4 \ \text{EXP} \ (-) \ 2 \ =$ dan el resultado $4 \times 10^{-2} = 0.04$
- Las calculadoras suelen tener una tecla para encontrar el inverso multiplicativo de un número x , es decir, $1/x$. Esa tecla aparece como $1/x$ o como x^{-1} . Por ejemplo, si pulsas $5 \ x^{-1} \ =$ obtendrás 0.2 , y esto es porque $\frac{1}{5} = 0.2$

Esa tecla podía utilizarse también para hacer el cálculo de $\sqrt{\frac{1}{22} + \frac{1}{18}}$ (ver el quinto ejemplo en la página 248). En vez de pulsar $\sqrt{} \ (\ 1 \div 22 \ + \ 1 \div 18 \) \ ,$ se podía teclear $\sqrt{} \ (\ 22 \ x^{-1} \ + \ 18 \ x^{-1} \)$

- La tecla Ans de muchas calculadoras tipo Casio sirve para encontrar el último resultado (ANS viene del inglés “answer”, que quiere decir “respuesta”). Por ejemplo, si quieres calcular $\sqrt{7.8 + 8.2}$, puedes calcular $7.8 \ + \ 8.2 \ =$, y luego $\sqrt{} \ \text{Ans} \ =$

Letreros en la pantalla

En la pantalla de tu calculadora pueden aparecer, además de los números y las operaciones marcadas con ellos, otros letreros, que ya fueron comentados.

- Los letreros Deg , Rad , GRD , D , R y G fueron explicados en la página 260.
- La letra E fue explicada en la página 261.
- Los letreros SD , REG y EQN fueron explicados en la página 260.
- Los letreros Fix y Sci fueron explicados en las páginas 261 a 263.

Pueden aparecer muchos otros letreros en la pantalla, que te indiquen o el tipo de resultado que estás obteniendo, o el tipo de error que se está cometiendo: recuerda lo que ocurre cuando le pides una operación imposible, por ejemplo: $8 \div 0 =$, o bien, $\sqrt{\quad} ((-) \div) =$.

EJERCICIOS

Recuerda que los ejercicios con numeración par son similares a los que los preceden. Haz solamente aquellos que consideres necesarios para tu proceso de aprendizaje.

4.11. Resuelve con tu calculadora las siguientes operaciones y expresa los resultados con tres cifras decimales (hasta milésimos).

- $\frac{65.78 + (-15.34 \times (-6))}{7.23 + 8.55}$
- $\frac{1}{7} - \left(\frac{8}{3} \times \frac{-4}{5} \right) + \frac{9}{7} \times \frac{3}{8}$
- $(14 - 45 \times 18) \div 2.3$
- $(25 + 28) \div 4 \times 7(1 - (.8 + .15))$
- $(6.12 \times 5.27) + 45.6 / (1.625 \times 8)$

f) $678 - 356 + (532 \times 10^{-1}) - 25^2 + 1400$

g) $\sqrt[4]{-6.4 + 3.6 \times (5.9 - 3.1)^2} \times \left(\frac{6}{5}\right)^3$

h) $4.8 - \frac{6}{4} \times \left(\frac{25}{9} - \frac{4}{15} \times (-10)\right) + \frac{\sqrt{-4 + 7 \times 8}}{6^3}$

4.12. Resuelve con tu calculadora las siguientes operaciones y expresa los resultados con dos cifras decimales (hasta centésimos).

a) $5.84 + 6.59 \times 10.87$

b) $6.35^2 - 1.02^3 / 3.22 \times \sqrt{1.65}$

c) $6.98^2 \div 3.457^3$

d) $5.48 + \frac{0.001 \times 862}{0.2} - 25 \div 7$

e) $\frac{4(32 - 7)^2 + 56}{13}$

f) $\frac{(5.45 - 7.56) \times 9}{6.45 - 1.35} + \frac{6.48 \times 2.75 - 5.03}{0.125 \times 7}$

g) $\frac{\sqrt{0.001}}{\sqrt[3]{0.01}}$

h) $\sqrt{13.457 \times 5 \div 2.64}$

i) $\frac{135 - 178 \times 0.45}{\sqrt{4.96}} + \frac{45.36 \times 5^2}{2.85 - 3.44} - \frac{12.123 \times (5.6 - 7.3)}{3.6 + 1.98}$

j) $\left(\frac{145.7 \times (5.8 - 3.4)}{6.45 - 7.3 + 4.8}\right)^{-2}$

k) $(-0.085 + 1.254) \times 56 \div 347.12 - 0.18$

l) $12 / (7 - 1.45) \times (23.6 - 5.43)$

m) $(6.4 + 5.8 \times 3.1)^{-1/4} \times (5/6)^{-3}$

n) $(7.809 - 8.097 + 9.780 - 7.908) / (-7.809 + 8.097 - 9.780 + 7.908)^2$

o) $1.08 + \frac{5.85 - 7.23 \times 2.87}{4.12 \times (-1.09)} - 14.87$

p) $12.34 - 56.78 + 1/6 \times (3.45 - 1.86) - 0.9^2$

q) $275 - (56.87 \times 4.33) / 6.12 + 345.2$

r) $45 - \sqrt{777 - 189} \div (12.5 \times 7.2^{-2} + 1.5) \times (8.4 - 9.35)$

4.13. Resuelve con tu calculadora las siguientes operaciones y expresa los resultados hasta diezmilésimos.

$$a) \frac{52.6 - 47.3}{2.6 / \sqrt{45}}$$

$$b) \frac{\frac{74.8}{12.4} - \frac{64.1}{6.3}}{\frac{54.1}{14.8} - \frac{63.7}{28.2}}$$

$$c) 5.82 \left(\frac{4.03 - 2.73}{3.41 - 2.66^2} \frac{6.41 - 8.08}{2.66^2} + 7.49 \right)$$

$$d) 5.82 \left(\frac{(4.03 - 2.73)(6.41 - 8.08)}{3.41 - 2.66^2} + 7.49 \right)$$

$$e) \frac{(1832 - 1842)^2 - 137465 / 1374650}{[-581 + 578]^2 (25.3 - 36.4)}$$

4.14. Resuelve con tu calculadora las siguientes operaciones y expresa los resultados hasta décimos.

$$a) \frac{5}{6} - \frac{14}{21} + \frac{6}{7}$$

$$b) 5 - \sqrt{\frac{4 + 6 \times (-2)}{7 - 18/2}}$$

$$c) \frac{5.42 - 7.48}{4.13 - 6.08}$$

$$d) \frac{\frac{58.26}{96.05} - \frac{35.43}{86.17}}{\frac{69.14}{78.63} + \frac{83.15}{105.16}}$$

$$e) \sqrt{\frac{1}{18} + \frac{1}{25}}$$

$$f) 5 \left(\frac{4 - 2 \times (6-8)}{(3-2)^2} + 7 \right)$$

$$g) \left(41.77 - \frac{54.12}{13.81} \right) (6.41 \times 7.04^2)$$

$$h) \frac{16(8573.178) - (984.9)(138.97)}{\sqrt{16(63780.23) - 984.9^2} \sqrt{16(1220.6631) - 138.97^2}}$$

4.15. A continuación, se dan los valores numéricos de algunas variables. Úsalos para encontrar el resultado de las expresiones indicadas, hasta milésimos.

$$\begin{array}{llllll} x = 32.79 & \varphi = 0.032 & m = 3 & \delta = -6.201 & a = 111 & \mu = -44.083 \\ \beta = 6071 & p = 0.0014 & \alpha = 468.21 & d = 3.1416 & \lambda = -2.5 & t = -2 \end{array}$$

a) $(\alpha + p\beta)^{t-1+m}$

b) $\frac{50p + \frac{50}{\varphi - t}}{a\delta\mu}$

c) $\sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{a}}}}$

d) $\sqrt{\frac{(d - \mu)(\beta + x)}{p + \varphi}} \sqrt{a - 4.13\mu}$

e) $\left(\frac{3 + \sqrt{2p + 1/\beta}}{d} - \frac{\delta}{x \cdot a} \right)^{m+t}$

4.16. A continuación, se dan los valores numéricos de algunas variables. Úsalos para encontrar el resultado de las expresiones indicadas, hasta centésimos.

$$\begin{array}{llllll} \beta = 5837 & g = -2.66 & \varepsilon = -0.752 & h = 77.402 & \sigma = 1.503 & k = 2 \\ s = 13.047 & \theta = 0.0071 & b = 2.5 & \gamma = -1 & z = 9.033 & \omega = -671 \end{array}$$

a) $(-g + b\gamma + 42\sigma)^{k-\gamma} - \frac{62}{\omega - h}$

b) $\sqrt[3]{\frac{\varepsilon h}{b - \sigma}} + \theta$

c) $\frac{s\omega - 12\beta}{(0.015\theta)^\gamma}$

d) $\left(\frac{h - z}{g^2\sigma} \right)^{b^k}$

e) $\frac{\sqrt{\beta g \varepsilon h \sigma k}}{s\theta b \gamma z \omega}$

5. PROPORCIONALIDAD Y PORCENTAJES

Este capítulo está dedicado a uno de los conceptos más útiles en el área de la aritmética: la proporcionalidad. El capítulo está dividido en tres secciones: empezaremos por ver a qué se refiere el término de proporcionalidad directa y hablaremos brevemente de la proporcionalidad inversa, que es menos común; después veremos qué tipo de problemas surgen cuando se habla de proporcionalidad; y la tercera sección estará consagrada a una familia muy particular de problemas: los porcentajes.

5.1. PROPORCIONALIDAD DIRECTA E INVERSA

En esta sección abordaremos dos formas de proporcionalidad: la directa, que es la más frecuente, y la inversa. Empezaremos caracterizando la forma más común de proporcionalidad entre dos variables, presentaremos una serie de ejemplos y veremos qué propiedades tiene. El último apartado estará dedicado a la proporcionalidad inversa.

5.1.1. ¿Cuándo son directamente proporcionales dos variables?

Sabemos que hay una relación entre la longitud de los lados de un cuadrado y su perímetro, ya que, por ejemplo, si el lado de un cuadrado mide 3 cm, su perímetro mide

$$4 \times 3 = 12 \text{ cm};$$

si el lado mide 7 m, su perímetro mide

$$4 \times 7 = 28 \text{ m}$$

y en general, si el lado del cuadrado mide d unidades, su perímetro va a medir

$$4d \text{ unidades.}$$

Por otra parte, si sabemos que el perímetro de un cuadrado es de 50 cm, podemos obtener la longitud de cada uno de sus lados dividiendo 50 entre 4, o lo que es lo mismo, multiplicando 50 por $\frac{1}{4}$; es decir, con cualquiera de estas operaciones:

$$\frac{50}{4} = 50 \div 4 = 50 \times \frac{1}{4} = 12.5 \text{ cm}$$

Como esta relación se conserva para todos los cuadrados sin importar la longitud de sus lados, tenemos una relación entre el lado de un cuadrado y su perímetro. Es decir, si d es la longitud del lado y p es el perímetro del cuadrado, la relación entre estas dos variables se puede expresar de cualquiera de estas maneras:

$$p = d \times 4 \quad , \quad d = p \times \frac{1}{4} = \frac{p}{4}$$

Veamos ahora otro ejemplo relacionado con la misma figura. Sabemos que si el lado de un cuadrado mide 3 cm, su área es $3^2 = 9 \text{ cm}^2$, y en general, si el lado del cuadrado mide d unidades, su área es d^2 unidades cuadradas. Por otra parte, si sabemos que el área de un cuadrado es de 81 m^2 , podemos conocer la longitud de cada uno de sus lados obteniendo la raíz cuadrada de 81, esto es $\sqrt{81} = 9 \text{ m}$. Es decir, si d es la longitud del lado y a es el área del cuadrado, la relación entre estas dos variables se puede expresar de cualquiera de estas maneras:



$$a = d^2 \quad , \quad d = \sqrt{a}$$

Observamos entonces que la longitud del lado del cuadrado está relacionada tanto con su perímetro como con su área. Sin embargo, estas relaciones son de distinto tipo, pues mientras que en la relación con el perímetro está involucrada una multiplicación (o una división) por una constante (4 o $\frac{1}{4}$), la relación con el área se establece a partir de una potencia o una raíz cuadrada.

Las relaciones con las que trabajaremos aquí son como la primera, es decir, en las que hay una multiplicación (o una división) por una constante. Decimos que las variables involucradas en una relación de este tipo son **directamente proporcionales** o que son **proporcionales** o que entre ellas hay **proporcionalidad** (o una **proporcionalidad directa**); * también decimos que hay una **variación proporcional**. A la constante se le llama **constante de proporcionalidad**.

Es decir, la longitud del lado de un cuadrado y el perímetro del cuadrado son proporcionales y la constante de proporcionalidad es 4 (o $\frac{1}{4}$). Esto se puede registrar en una tabla como la siguiente:

Longitud del lado	1	2	5.5	8.43	18	300	1250	5050.7	d
Perímetro	4	8	22	33.72	72	1200	5000	20202.8	$4d$

Veamos ahora otros ejemplos. Te invitamos a verificar todos los cálculos en tu calculadora.

Dos ejemplos de variación directamente proporcional

- Supongamos que en una cafetería solo venden una clase de refrescos, cuyo precio es de \$20, y llamemos r a la cantidad

* En general solo se usan el adverbio “directamente” o el adjetivo “directa” cuando hay una posible confusión con otro tipo de relación de proporcionalidad.

de refrescos que un grupo de amigos consumen en la cafetería, y d a la cantidad de dinero que pagan por los refrescos. Por ejemplo, podemos tener

r : cantidad de refrescos	d : dinero pagado
8	\$160
4	\$80
10	\$200

Observa que como sabemos que cada refresco cuesta \$20, podemos saber cuánto dinero van a pagar, conociendo la cantidad de refrescos consumidos; aun con una cantidad de refrescos no incluida en la tabla, como $r = 7$, podemos saber cuánto pagarán: $d = 7 \times 20 = \$140$. Y viceversa, si conocemos cuánto pagaron podemos saber cuántos refrescos consumieron: si pagaron $d = \$200$, consumieron $r = 200 \div 20 = 10$ refrescos.

(Observa que, si bien en esta tabla hemos puesto las dos variables r y d como columnas, también podríamos haberlas puesto como renglones, igual que en la tabla de abajo).

r : cantidad de refrescos	8	4	10
d : dinero pagado	\$160	\$80	\$200

En este ejemplo tenemos que r y d varían proporcionalmente, y la relación entre ambas variables se puede expresar como

$$d = 20 \times r \quad \text{o bien} \quad r = d \times \frac{1}{20} = \frac{d}{20}$$

El precio del refresco es la constante de proporcionalidad. Observa que si no supiéramos cuánto cuesta el refresco, pero sí cuántos refrescos consumieron los amigos y cuánto dinero pagaron, entonces podríamos encontrar el precio, P . Así

$$P = \frac{d}{r}$$

Es decir, si conocemos dos de los números r , d y P , siempre podemos encontrar el tercero.

- Cuando hacemos frecuentemente una misma receta de cocina, pero cada vez para un número distinto de personas, podemos encontrar constantes de proporcionalidad que nos permitan saber las cantidades necesarias de cada ingrediente. Por ejemplo, consideremos los ingredientes de la siguiente receta original de natilla para 8 personas:
 - 2 litros de leche
 - 16 yemas de huevo
 - 8 cucharadas de maicena
 - 2 cucharaditas de vainilla
 - $\frac{1}{2}$ cucharadita de sal
 - 4 tazas de azúcar

Si nos fijamos en la leche, podemos hacer una tabla de proporcionalidad para ver cuánta leche se necesita para distinta cantidad de personas. Empezamos viendo que si 2 litros son para 8 personas, para una persona es la octava parte de eso, o sea $\frac{2}{8}$ de litro, es decir, $\frac{1}{4}$ de litro. La receta de natilla requiere $\frac{1}{4}$ de litro de leche *por persona*. Y entonces podemos tener una tabla de proporcionalidad así:

		Número de personas: p					
		1	4	5	8	10	12
leche (en litros): l	Constante de proporcionalidad: $\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \times 1$	$\frac{1}{4} \times 4$	$\frac{1}{4} \times 5$	$\frac{1}{4} \times 8$	$\frac{1}{4} \times 10$	$\frac{1}{4} \times 12$
		$= \frac{1}{4}$	$= 1$	$= \frac{5}{4}$	$= 2$	$= \frac{5}{2}$	$= 3$

Es decir, si l es la cantidad de leche y p es el número de personas, la relación entre estas dos variables es de proporcionalidad y se puede expresar así:

$$l = \frac{1}{4} \times p \quad \text{o bien} \quad p = 4 \times l$$

Además, la constante de proporcionalidad la encontramos también al dividir l entre p en cualquier columna de la tabla anterior:

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} = \frac{5}{4} = \frac{2}{8} = \frac{5}{10} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

Lo mismo podemos hacer con los demás ingredientes, obteniendo la constante de proporcionalidad al dividir la cantidad indicada en la receta entre 8. De este modo vemos que “16 yemas para 8 personas” significa 2 yemas *por persona*. Procediendo de manera análoga podemos construir una tabla que muestre la cantidad necesaria de cada ingrediente para una persona.

	Cantidad <i>por persona</i>					
	Leche (litros)	Yema	Maizena (cdas)	Vainilla (cditas)	Sal (cditas)	Azúcar (tazas)
Constante de proporcionalidad	1/4	2	1	1/4	1/16	1/2

Dos ejemplos de variación no proporcional

- Supongamos que Saúl nació 7 años antes que Beatriz, y que llamamos *s* a la edad de Saúl y *b* a la edad de Beatriz. Entonces tenemos, por ejemplo, que:
 - cuando Saúl tiene *s* = 12 años, Beatriz tiene *b* = 12 – 7 = 5 años
 - cuando la edad de Beatriz es *b* = 25 años, Saúl tiene *s* = 25 + 7 = 32 años

Estas relaciones las podemos poner también en forma de tabla, como la siguiente, donde a los ejemplos de arriba hemos agregado otros:

<i>s</i> =edad de Saúl	7	8	12	14	19	32	47	87
<i>b</i> =edad de Beatriz	0	1	5	7	12	25	40	80

Las variables s y b están relacionadas. Como sabemos que Saúl le lleva 7 años a Beatriz, basta con que sepamos la edad de uno de los dos para conocer la otra; por ejemplo:

- si sabemos que Beatriz tiene $b=30$ años, sabremos que Saúl tiene $s = b + 7 = 37$ años;
- si sabemos que Saúl tiene $s = 40$ años, sabremos que Beatriz tiene $b = s - 7 = 33$ años;
- además, si no supiéramos cuántos años hay entre uno y otro, al conocer las edades de ambos podríamos saber esa diferencia D .

Podemos expresar la relación entre estas variables con fórmulas:

$$s = b + D \quad \text{o bien} \quad b = s - D$$

Observa que la relación entre las variables s y b no involucra una multiplicación ni una división. Hay una constante en juego: D , la diferencia de edades, pero esa constante NO es igual a los cocientes de los valores de ambas variables. Las variables s y b NO varían proporcionalmente.

- La siguiente tabla muestra las equivalencias entre dos maneras de medir la temperatura: con grados centígrados o Celsius ($^{\circ}\text{C}$) y con grados Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$).

$^{\circ}\text{C}$	-23.3	-17.8	-10	-5	0	18.9	36.7	37.8	100	160	200
$^{\circ}\text{F}$	-10	0	14	23	32	66	98	100	212	320	392

La relación entre las dos maneras se puede expresar con cualquiera de estas dos fórmulas:

$$^{\circ}\text{F} = \frac{9}{5} (^{\circ}\text{C}) + 32 \quad \text{y} \quad ^{\circ}\text{C} = \frac{(^{\circ}\text{F}) - 32}{1.8}$$

En estas expresiones hay una multiplicación y una división, pero también hay una suma y una resta, lo que hace que no haya constante de proporcionalidad.

La relación entre la temperatura expresada en $^{\circ}\text{F}$ y la expresada en $^{\circ}\text{C}$ NO es de variación proporcional.

5.1.2. Características de la variación directamente proporcional

Hemos mostrado ejemplos de variaciones en las que hay proporcionalidad y de variaciones en las que no la hay, donde podemos expresar la relación entre las variables tanto en tablas como con expresiones matemáticas. Con ello hemos querido hacer ver que, si una variación es proporcional, esto no se debe al hecho de que se pueda expresar en tablas ni mediante una fórmula.

Ahora veremos algunas características de las variaciones de proporcionalidad, y para ello utilizaremos un ejemplo muy simple, para poder visualizar algunos conceptos:

- En un taller de fotocopiado tienen la siguiente tabla:

<i>f</i> : Cantidad de fotocopias	1	2	3	4	5	10	15	20	40	50	100
<i>m</i> : Monto a cobrar	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	5.00	7.50	10.00	20.00	25.00	50.00

Valor unitario

Observa que, en cualquier columna de la tabla,

- Si divides la *cantidad de fotocopias* entre el *monto a cobrar* obtienes una constante, que es $\frac{f}{m} = 2$. El significado de esta constante de proporcionalidad es que 2 es la cantidad de fotocopias *por cada* peso.
- Si divides *el monto a cobrar* entre la *cantidad de fotocopias* obtienes una constante, que es 0.50. El significado de esta constante de proporcionalidad es que 0.50 es el precio *de cada* fotocopia.

Efectivamente, observa en la tabla que 2 es la cantidad de fotocopias que corresponde al monto de \$1.00, y que \$0.50 es el monto a cobrar por una cantidad de fotocopias igual a 1.

A cada una de esas dos constantes de proporcionalidad se las conoce también con el nombre de “**valor unitario**”. En el taller de nuestro ejemplo,

- Dan 2 fotocopias *por* peso: $2f \leftrightarrow \$1$
- Cada fotocopia cuesta 50 centavos: $\$0.50$ *por* fotocopia, o $\$0.50 \leftrightarrow$ fotocopia

Vale la pena resaltar el uso de la palabra “**por**” en las expresiones anteriores: no debemos entenderla como una operación de multiplicación sino como un sinónimo de “**por cada**”.

En general, si x y y varían de manera directamente proporcional, entonces

- ☞ el **valor unitario de y** es un valor de x que se obtiene al dividir $x \div y$; se interpreta como:
 - el valor que toma x cuando y vale 1;
 - “cuánto de x ” **por cada y** .
- ☞ el **valor unitario de x** es un valor de y que se obtiene al dividir $y \div x$; se interpreta como:
 - el valor que toma y cuando x vale 1;
 - “cuánto de y ” **por cada x** .

Cuando se conocen los valores de una variable, los valores unitarios pueden servir para encontrar los valores de la otra, de la siguiente manera:

- Si conoces el valor unitario de y , al multiplicarlo por un valor cualquiera de y obtienes la cantidad x correspondiente. En nuestro ejemplo no hablamos de x y y , sino de f y m . Así, si sabes que por cada peso obtienes 2 fotocopias, entonces por un monto de $m = \$12.00$ puedes sacar $f = 2 \times 12 = 24$ fotocopias.
- Si conoces el valor unitario de x , al multiplicarlo por un valor cualquiera de x obtienes la cantidad y correspondiente. En

nuestro ejemplo, si sabes que cada fotocopia cuesta $m = \$0.50$, entonces 27 fotocopias costarán $m = 0.50 \times 27 = \$13.50$

En el ejemplo de las fotocopias uno de los dos valores unitarios se refiere a la cantidad de fotocopias *por* \$1 y el otro valor unitario nos indica cuánto dinero se paga *por* cada fotocopia.

Es común que en una relación de proporcionalidad uno de los dos valores unitarios no tenga sentido. Así, en el ejemplo de los refrescos habíamos hablado de la constante \$20 como el precio de cada refresco. El otro valor unitario, que sería la cantidad de refresco por cada \$1, no tendría sentido práctico en este caso.

Observa que en los ejemplos de variación no proporcional (las edades y la temperatura), no hay constantes que cumplan esos roles; es decir, no hay valores unitarios.

Propiedades

A continuación, se enuncian algunas propiedades de la variación proporcional. Acompañamos cada una con un ejemplo sobre lo que ocurre en el taller de fotocopiado con el que hemos estado trabajando; tú puedes hacer más verificaciones con la tabla de la página 278.

- Cuando una variable asume el valor 0, el valor de la otra variable también es 0.
 - En nuestro ejemplo, es evidente que por \$0.00 no van a dar ninguna fotocopia, y también que por 0 fotocopias no van a cobrar nada.
- Cuando una variable crece o decrece, la otra variable también crece o decrece *en la misma proporción*. Esto es, si una se duplica la otra se duplica; si una se triplica, la otra también se triplica; a la mitad de una corresponde la mitad de la otra, a la tercera parte de una corresponde la tercera parte de la otra, etcétera.

- Por ejemplo, si la cantidad de fotocopias se quintuplica de $f=4$ a $f=20$, también se quintuplica el monto de $m = \$2.00$ a $m = \$10.00$
- También se puede usar la tabla para encontrar el monto a cobrar por 300 fotocopias, porque como 300 es igual a 100×3 , el monto a cobrar es 100 veces el precio de 3 fotocopias o sea $100 \times 1.50 = \$150.00$
- A la suma de dos valores de una variable, le corresponde la suma de los valores correspondientes de la otra.
 - Por ejemplo, el monto a pagar por 5 fotocopias es igual al monto a pagar por 2 más el monto a pagar por 3 fotocopias. Es decir, a $2+3=5$ fotocopias, le corresponden $1.00 + 1.50 = \$2.50$
 - También se puede encontrar el monto a cobrar por 47 fotocopias, considerando que $47=40+5+2$, así que el monto es la suma de los montos correspondientes, o sea $20.00 + 2.50 + 1.00 = \$23.50$.
- Las dos últimas propiedades se pueden utilizar simultáneamente.
 - Por ejemplo se puede encontrar el monto a cobrar por 543 fotocopias, considerando $543 = 500 + 40 + 3$, así que se cobra 5 veces lo de 100 fotocopias, más lo de 40, más lo de 3, es decir $5 \times 50.00 + 20.00 + 1.50 = \271.50

En las variaciones no proporcionales estas propiedades generalmente no se cumplen.

5.1.3. Proporcionalidad inversa

Hay un tipo de relación proporcional llamada “proporcionalidad inversa” que es mucho menos frecuente que la proporcionalidad directa. La presentaremos a través de un ejemplo.

- Supongamos que se va a envasar 2.4 kg de mermelada en frascos del mismo tamaño; llamemos f a la cantidad de frascos y c al contenido, medido en gramos, de cada uno. Por ejemplo, podemos tener:

f : cantidad de frascos	c : contenido de cada frasco
6	400 g.
10	240 g.
24	100 g.

Como conocemos la cantidad de mermelada que estamos envasando (2.4 kg), al conocer cuántos frascos usamos podremos saber cuánto le cabe a cada uno, y viceversa, al conocer cuántos gramos caben en cada frasco podremos saber cuántos frascos usamos. Por ejemplo:

- si se usan $f = 12$ frascos iguales, entonces en cada frasco caben $c = \frac{2400}{12} = 200$ gramos de mermelada;
- si la mermelada se envasa en frascos de $c = 150$ gramos, entonces se necesitan $f = \frac{2400}{150} = 16$ frascos.

Además, si no supiéramos cuánta mermelada se envasa, al conocer la cantidad de frascos y el contenido de cada uno, sabríamos cuánta mermelada hay en total. Por ejemplo:

- si se usan $f = 15$ frascos y en cada uno caben $c = 160$ gramos de mermelada, entonces sabremos que se envasaron $M = 15 \times 160 = 2400$ gramos de mermelada

Observa que en este caso podemos considerar que M , la cantidad de mermelada, es una constante. Si conocemos dos de los números c , g y M , siempre podemos encontrar el tercero, de una de estas maneras:

$$f = \frac{M}{c}, \quad \text{o bien} \quad c = \frac{M}{f}, \quad \text{o bien} \quad M = f \times c.$$

Habrás notado que ahora la constante es igual a la cantidad de frascos *multiplicada* por el contenido de cada frasco. Es decir, $M = f \times c$.

Éste es un caso en el que hay una **proporcionalidad inversa** entre dos variables, la cantidad de frascos y el contenido de cada uno. También decimos que hay una variación inversamente proporcional. Al número M lo llamamos, como en el caso de la proporcionalidad directa, **constante de proporcionalidad**.

Observemos las similitudes y diferencias que hay con respecto a la relación de proporcionalidad directa que habíamos encontrado entre el precio P de los refrescos, la cantidad r de refrescos consumidos y la cantidad de dinero d pagada por ellos. En aquel caso habíamos encontrado estas expresiones:

$$d = P \times r, \quad \text{o bien} \quad r = \frac{d}{P}, \quad \text{o bien} \quad P = \frac{d}{r}$$

y ahora tenemos, con los frascos de mermelada, estas expresiones:

$$f = \frac{M}{c}, \quad \text{o bien} \quad c = \frac{M}{f}, \quad \text{o bien} \quad M = f \times c.$$

Las grandes diferencias entre la variación directamente proporcional y la variación inversamente proporcional son las siguientes:

- Cuando dos variables tienen una variación directamente proporcional, mientras *mayor* sea una de las dos cantidades, *mayor* es la otra. En la variación inversamente proporcional mientras *mayor* sea una de las dos cantidades, *menor* es la otra.
 - En el ejemplo de los refrescos, a *más* refrescos consumidos, *más* dinero gastado (o viceversa: a *más* dinero gastado, *más* refrescos consumidos).

- En el ejemplo de la mermelada, a *mayor* contenido de los frascos, *menos* frascos utilizados (o viceversa: a *mayor* cantidad de frascos, *menor* contenido de cada uno).
- Cuando dos variables tienen una variación directamente proporcional, si una cantidad se duplica, triplica, se reduce a la mitad, etc., la otra también se duplica, triplica, se reduce a la mitad, etc. En la variación inversamente proporcional, cuando una cantidad se duplica la otra se reduce a la mitad, cuando una se reduce a la tercera parte la otra se triplica, etc.
 - En el ejemplo de los refrescos, por el triple de refrescos se paga el triple; por la mitad de dinero gastado se compra la mitad de refrescos.
 - En el ejemplo de la mermelada, si se usa el doble de frascos, en cada uno se envasa la mitad de mermelada, si se envasa el triple en cada frasco se usa la tercera parte de los frascos.
- En la variación directamente proporcional la constante de proporcionalidad es el cociente de los valores de las dos variables, y según cómo se calcule se trata de uno u otro de los valores unitarios, mientras que en la variación inversamente proporcional la constante de proporcionalidad es el producto de los valores de las dos variables; no se habla en este caso de valor unitario.
 - En el ejemplo de los refrescos el valor unitario con sentido práctico es la constante P : es el precio de cada refresco.
 - En el ejemplo de la mermelada, la constante M es el producto de la cantidad de frascos y el contenido de cada uno, y siempre da 2400 g.

Como dijimos anteriormente, en general, salvo que se indique explícitamente que se está hablando de “proporcionalidad inversa”, el término “proporcionalidad” se refiere a proporcionalidad directa, y

si se dice que dos cantidades varían “proporcionalmente”, lo que se quiere decir es que varían de manera directamente proporcional.

Un último comentario: frecuentemente las relaciones de proporcionalidad inversa sólo son válidas en determinado intervalo de valores. Veamos el siguiente ejemplo, que suele utilizarse en libros de texto que abordan este tema:

- Se considera la relación entre la cantidad de albañiles que intervienen en la construcción de un muro y el tiempo que les lleva:

Albañiles	1	2	4	5	10	20
Días	20	10	5	?	?	?

Podría pensarse que 5 albañiles se tardan 2 días, pero, aunque según la proporcionalidad inversa 20 albañiles se tardarían 1 día en construir el muro, lo más probable es que tantas personas no se puedan coordinar y se estorben mutuamente, por lo que tal vez tardarían más de 1 día. Si se siguiera al extremo este ejercicio, se tendría que 9,600 albañiles construirían ese muro en un minuto.

5.1.4. Otros significados de “proporción”

Además de los significados que tienen en la vida cotidiana el término “proporción” y otros relacionados con él, dentro del ámbito de las matemáticas esta palabra también puede tener diversos significados. De entre ellos, destacamos que se puede manejar por ejemplo que dos figuras son proporcionales cuando tienen la misma forma, como las dos de la derecha.



Otro sentido muy frecuente es que se llame proporción a una fracción respecto a un todo. Por ejemplo, si de un grupo de 5000 aspirantes a entrar a una universidad hay 2137 que pasan el examen de admisión, se puede decir que los que ingresan están en proporción de $\frac{2137}{5000}$.

Otro sentido más de la palabra es cuando se entiende la proporción como equivalencia de razones. Recuerda que una **razón** es una forma de relación ente dos cantidades. Por ejemplo, si en una escuela hay 800 alumnos, de los cuales 500 son hombres y 300 mujeres, se puede decir que en ella los hombres y las mujeres están en razón de 5 : 3, lo que se lee “cinco *es a* tres”. Esto quiere decir que *por cada* cinco hombres hay tres mujeres, o bien que *por cada* tres mujeres hay cinco hombres. Dos razones pueden ser equivalentes, en el mismo sentido en que dos fracciones pueden ser equivalentes. Por ejemplo, es lo mismo 5 : 3 que 10 : 6, porque si en otra escuela los hombres y las mujeres están en razón de “diez es a seis” hay, proporcionalmente, la misma relación entre las cantidades de estudiantes de ambos sexos en las dos escuelas. Esta equivalencia se suele escribir así: 5 : 3 :: 10 : 6, lo que se lee “cinco *es a* tres *como* diez *es a* seis”. Entonces, la proporción es la equivalencia de esas dos razones.

EJERCICIOS

Recuerda que los ejercicios con numeración par son similares a los que los preceden. Haz solamente aquellos que consideres necesarios para tu proceso de aprendizaje.

5.01. A continuación, se presenta una serie de situaciones que muestran una o varias relaciones entre dos variables. Indica en cada caso cuáles son las variables y si se trata de una variación directamente proporcional, inversamente proporcional o no proporcional. Cuando se trate de una variación directamente proporcional

o inversamente proporcional, indica cuánto vale la constante de proporcionalidad.

- a) En la siguiente tabla se presentan los tiempos que empleó un trencito eléctrico para recorrer su vía a distintas velocidades. La velocidad se midió en centímetros recorridos por segundo y el tiempo en segundos.

Velocidad	2	3	4	5
Tiempo	300	200	150	120

- b) Se realizan dos pruebas de rendimiento de un automóvil, registrando la cantidad de litros de gasolina que consume de acuerdo con la cantidad de kilómetros que recorre. En la primera serie de pruebas, efectuada en una pista a velocidad constante y con la misma carga, se obtiene

Gasolina (litros)	2	5.7	8	14	16.2	20
Kilómetros recorridos	30	85.5	120	210	243	300

En la segunda serie de pruebas, realizada en condiciones de uso común en una ciudad grande, se obtiene

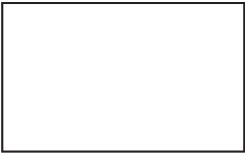
Gasolina (litros)	2	6.1	9	14.8	18.1	22.2
Kilómetros recorridos	30	85.5	120	210	243	300

Compara las dos situaciones; ¿a qué se pueden deber las similitudes y diferencias observadas?

- c) En cierta ciudad se formaron equipos de trabajadores para arreglar los baches de distintas calles. La siguiente tabla muestra la cantidad de días requeridos para el arreglo de una calle y el número de trabajadores que conformaban el equipo.

Trabajadores	4	9	10	15	20
Días	16	12	11	10	8

- d) Los siguientes rectángulos son de los considerados clásicamente como “perfectos”; todos tienen una forma como el de la figura de la derecha. En este ejercicio redondea a una cifra decimal los resultados de los cálculos que realices.



Largo en cm	4.5	10.0	16.2	45.0	56.6	161.8
Ancho en cm	2.8	6.2	10.0	27.8	35.0	100

5.02. A continuación, se presenta una serie de situaciones que muestran una o varias relaciones entre dos variables. Indica en cada caso cuáles son las variables y si se trata de una variación directamente proporcional, inversamente proporcional o no proporcional. Cuando se trate de una variación directamente proporcional o inversamente proporcional, indica cuánto vale la constante de proporcionalidad.

- a) En el puesto de doña Lupe, el par de calcetas para niña cuesta \$45. Durante la semana pasada doña Lupe hizo las siguientes ventas:

Día	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
Pares	5	3	8	6	4	12	9
Importe	225	135	360	270	180	540	405

- b) En la tienda “El Ropero” colocaron un cartel como el que se muestra a la derecha, y en el escaparate, donde se exhibía la ropa de niño, se mostraba la siguiente tabla de precios:

GRAN OFERTA
VISTA A SUS NIÑOS
COMPRE MUCHO
Y AHORRE MUCHO

	1 prenda a	2 prendas a	3 prendas a	6 prendas a	12 prendas a
Pares de calcetas	\$40	\$74	\$104	\$200	\$384
Pares de calcetines	\$30	\$58	\$84	\$160	\$300
Camisetas	\$70	\$132	\$180	\$340	\$640
Camisas	\$300	\$570	\$800	\$1440	\$2400
Sudaderas	\$240	\$480	\$720	\$1440	\$2880
Pantalón deportivo	\$180	\$350	\$500	\$900	\$1700
Pantalón vaquero	\$360	\$680	\$880	\$1600	\$3000

- c) Para un cultivo de levaduras en el que cada célula se duplica cada 10 minutos se empieza colocando en el medio de cultivo 13 células. Si m es el tiempo (medido en minutos) después del inicio del experimento y c es la cantidad de células que hay en el momento m , la relación entre ambas variables se puede expresar en la siguiente tabla.

m : minutos	0	1	5	10	15	20	25
c : células	13	14	18	26	37	52	74

- d) Una profesora registró el tiempo que tardaron sus alumnos en resolver un examen y la calificación que obtuvieron en el mismo. Algunos de los datos aparecen en la siguiente tabla.

Tiempo en minutos	25	40	45	48	65	75	90
Calificación	8.5	7	9	9.5	10	9	7.5

- e) En Acapulco se renta una casa en la que pueden caber hasta 8 personas. Dependiendo de la cantidad de huéspedes, cada uno paga lo que se indica por un fin de semana.

Nº de personas	1	2	3	4	5	6	7	8
\$	4,200	2,100	1,400	1,050	840	700	600	525

- f) Una señora registró el peso (en kg) y talla (en cm) de su bebé desde que nació hasta los seis meses.

Peso en kg	3.159	4.158	5.057	5.864	6.588	7.236	7.815
Talla en cm	50	54	57	60	62	65	67

- g) Los siguientes rectángulos tienen la misma área:

Largo en cm	120	80	60	1800	90	360
Ancho en cm	30	45	60	2	40	10

5.03. Indica si las siguientes relaciones son de proporcionalidad directa o no. En caso de que sí lo sean, encuentra un valor unitario con sentido práctico:

- El borde de la cascada está retrocediendo a razón de 2 cm cada 5 años
- Si inviertes aquí por veinte años, tu dinero se duplica cada tres años
- En nuestra compañía telefónica te cobramos a peso el minuto de cualquier llamada de larga distancia nacional
- Cada tres días salgo a caminar $1\frac{1}{2}$ kilómetros
- Mientras más tarde es, más me cobra el taxi que tomo para llegar al trabajo

5.04. Indica si las siguientes relaciones son de proporcionalidad directa o no. En caso de que sí lo sean, encuentra un valor unitario con sentido práctico:

- En una canasta, dos de cada ocho guayabas están verdes
- Cada vez que me pongo triste, mi marido se enoja
- Por cada siete políticos honestos hay veintiún políticos deshonestos
- Juanito tiene 5 años y ya mide 1 m de estatura
- Por cada media hora, el automóvil recorrió cuarenta kilómetros
- Te cobran a \$35.00 el paquete de 4 kilos
- Mientras más distancia recorres en el taxi, menos te cuesta cada kilómetro en promedio

5.05. Para los siguientes dos estados de la República Mexicana, indica cuál es el valor unitario más conveniente para expresar la densidad demográfica (relación entre superficie y cantidad de habitantes):

- a) La Ciudad de México tiene una superficie de 1,486 km², y en 2010 tuvo 8,851,080 habitantes.
- b) El Estado de Baja California Sur tiene una superficie de 73,922 km², y en 2010 tuvo 637,026 habitantes.

5.06. Indica cuál es el valor unitario más conveniente para expresar la velocidad de los siguientes animales:

- a) El caracol jardín recorre 16 cm en 20 segundos
- b) El escarabajo australiano recorre 3,000 cm en 12 segundos

5.07. En los siguientes incisos se presentan tablas con información de cantidades que tienen una variación proporcional directa. Usa las propiedades que se han visto en esta sección para encontrar los valores que faltan.

a)

X	2	3	5	7	8	9	10
Y	4.8	7.2					

b)

X	1	5	10	20	6	16	220
Y	14.50						

c)

X	3	0		9		12	
Y	5		10		50		15

5.08. En los siguientes incisos se presentan tablas con información de cantidades que tienen una variación proporcional directa. Usa las propiedades que se han visto en esta sección para encontrar los valores que faltan.

a)

X	5.1			1		2	
Y	2.4	4.8	0		1		2

b)

X	363	11		1	2		
Y	627		19			1	2

c)

X	65	2		7	1001		
Y	1001		7			65	2

d)

X	0.105	1		0			
Y	0.14		1		0	0.187	0.105

5.09. Se tienen 10 kilogramos de puré de jitomate para envasar y vender. Completa la siguiente tabla que relaciona el contenido de un frasco con la cantidad de frascos de ese tamaño que se pueden llenar sin que sobre puré. (Observa que algunos valores de X están expresados en gramos y otros en kilogramos, antes de completar la tabla debes uniformar las unidades).

X: Contenido	100 g	200 g		300 g		$\frac{3}{4}$ k		2 k
Y: Cantidad			40		20		10	

5.10. Cada semana, Karla recorre en automóvil la distancia entre su casa y la de sus padres, en otra ciudad. En varios viajes registra el tiempo que tarda en llegar y la velocidad promedio, pero llegó su hermanito y le manchó con tinta indeleble su tabla.

X: tiempo en horas		3	4		2.5
Y: velocidad promedio (km/hr)	110	80		70	

- a) Completa la tabla anterior.
- b) ¿A qué distancia de su casa está la de sus padres?

5.2. PROBLEMAS CON PROPORCIONES

En los ejemplos anteriores estuvimos ilustrando las relaciones entre dos variables con tablas con muchas parejas de valores. Sin embargo, dos parejas bastan en esos ejemplos para ver si hay proporcionalidad o no.

r : cantidad de refrescos	d : dinero pagado
4	80
8	160

número de personas: p	5	12
leche (en litros): l	$5/4$	3

s : edad de Saúl	14	47
b : edad de Beatriz	7	40

$^{\circ}\text{C}$	36.7	100
$^{\circ}\text{F}$	98	212

f : cantidad de frascos	c : contenido de cada frasco
6	400 g
10	240 g

Así podemos ver que en los dos primeros ejemplos hay proporcionalidad directa porque $\frac{4}{8} = \frac{80}{160}$ y porque $\frac{5}{5/4} = \frac{12}{3}$, mientras que en los últimos tres no la hay porque $\frac{14}{7} \neq \frac{47}{40}$, porque $\frac{36.7}{98} \neq \frac{100}{212}$ y porque $\frac{6}{10} \neq \frac{400}{240}$. Por cierto, podemos ver también que solo en el último de estos ejemplos hay proporcionalidad inversa, porque es el único caso con una igualdad del tipo $6 \times 400 = 10 \times 240$.

Es frecuente que al trabajar problemas de proporcionalidad se consideren solamente dos parejas de datos (cuatro números) como en los cuadros anteriores. Es lo que haremos en varios de los ejemplos de esta sección, donde mostraremos los tres tipos de problemas de proporcionalidad directa más comunes: los de valor perdido, los de comparación de razones y los de reparto proporcional. A continuación, se describen los tres tipos y posteriormente hablaremos específicamente de cada uno.

- **Problemas de valor perdido**, también llamados de cuarta proporcional. En estos problemas se da por sentado que hay una proporcionalidad (es decir, las dos razones son iguales o equivalentes), pero se desconoce uno de los cuatro números. Por ejemplo: si se sabe que 2 kg de limones cuestan \$80, ¿cuánto cuestan 3 kg de limones? Esto se puede expresar poniendo los tres números conocidos en un cuadro, o bien, como una equivalencia de fracciones, así:

	kilos	costo	
1. ^a compra	2 kg	\$80	$\frac{80}{2} = \frac{?}{3}$
2. ^a compra	3 kg	?	

- **Problemas de comparación de razones**. En estos problemas se presentan los cuatro números, pero lo que se desea averiguar es si hay o no proporcionalidad y, si no la hay, dónde es mayor la razón. Por ejemplo: si 2 kg de frijoles cuestan \$90 y 5 kg de lentejas cuestan \$250, ¿qué está más barato, los frijoles o las lentejas? Nuevamente podemos expresar el problema en un cuadro o como fracciones, pero ahora nos preguntamos cuál de ellas es mayor.

	kilos	costo	
frijoles	2 kg	\$90	$\frac{90}{2} ? \frac{250}{5}$
lentejas	5 kg	\$250	

- **Problemas de reparto proporcional**. En estos problemas sabemos en qué proporciones hay que distribuir una cantidad determinada y nos preguntamos cómo son las cantidades que corresponden a esas proporciones. Por ejemplo: si Katia, Gustavo y Yoali cobraron \$10,000 por un trabajo para el que Katia invirtió 27 horas, Gustavo 18 y Yoali 35, ¿cuánto debe cobrar cada uno? Si queremos expresar el problema como tabla, podemos hacerlo así:

	Horas	Dinero
Katia	27	?
Gustavo	18	?
Yoali	35	?
TOTAL	80	10,000

A continuación, hablaremos brevemente del tipo de estrategias que se pueden utilizar para resolver estos problemas.

5.2.1. Problemas de valor perdido

Reconsideremos el ejemplo de arriba:

Si se sabe que 2 kg de limones cuestan \$80,
¿cuánto cuestan 3 kg de limones?

Como dijimos, una manera de plantear la información es en un cuadro como el de la derecha. También se podría decir que buscamos una fracción equivalente a $\frac{80}{2}$ que tenga 3 en el denominador, es

decir, $\frac{80}{2} = \frac{?}{3}$. Para solucionar el problema se pueden utilizar varias estrategias:

2 kg	\$80
3 kg	$x = ?$

- Una manera es encontrar el valor unitario que tenga sentido. Aquí nos podemos preguntar: ¿cuánto vale el kilogramo de limones? La respuesta es que si 2 kg valen \$80, 1 kg vale la mitad, o sea $80 \div 2$, es decir que el kilo de limón está a \$40. Entonces 3 kilos valen tres veces eso, o sea $40 \times 3 = \$120$. Las operaciones que hemos hecho se pueden escribir así:

$$x = \frac{80}{2} \times 3 = \$120$$

- También se puede ver que, como 3 kg son una vez y media los 2 kg de la primera compra (porque $3 \div 2 = 1.5$), el dinero que se pagará por ellos será también una vez y media los \$80 que se pagaron aquella vez, o sea $1.5 \times 80 = \$120$. Las operaciones que hemos hecho se pueden escribir así:

$$x = \frac{3}{2} \times 80 = \$120$$

- Pero tal vez la estrategia más conocida es la llamada “**regla de tres**”. Como lo que queremos calcular es el valor de x , multiplicamos 3 por 80 y dividimos entre 2 (el número conocido que se encuentra “esquinado” en diagonal con x). Es decir, las operaciones que hacemos son:

2 kg	80
3 kg	$x = ?$

$$x = \frac{3 \times 80}{2} = \$120$$

Observa que las operaciones que hicimos en los tres casos son las mismas, aunque en distinto orden:

$$x = \frac{80}{2} \times 3 = \frac{3}{2} \times 80 = \frac{3 \times 80}{2} = \$120$$

Esto es, sea cual sea la estrategia utilizada, llegamos al mismo resultado; efectivamente, 120 es el número que nos faltaba para tener dos fracciones equivalentes: ahora sabemos que $\frac{80}{2} = \frac{120}{3}$. Si 2 kg de limones cuestan \$80, por 3 kg pagaremos \$120.

La regla de tres es, entonces, una manera muy práctica de hacer los cálculos. Tal vez te preguntes: ¿cómo saber en qué lugar del cuadro debe ir la x ? En el cuadro de arriba pusimos los kilos en la primera columna y los precios en la segunda, y las dos compras en los renglones, pero podríamos haber invertido los kilos y los precios o las dos compras:

2 kg	\$80
3 kg	$x = ?$

3 kg	$x = ?$
2 kg	\$80

$x = ?$	3 kg
\$80	2 kg

\$80	2 kg
$x = ?$	3 kg

Y también podríamos haber usado los dos renglones para poner los kilos y los precios, y las dos columnas para poner ambas compras:

2 kg	3 kg
\$80	$x = ?$

\$80	$x = ?$
2 kg	3 kg

$x = ?$	\$80
3 kg	2 kg

3 kg	2 kg
$x = ?$	\$80

En cualquiera de esos cuadros, los dos números conocidos (\$80 y 2 kg) están o en el mismo renglón o en la misma columna. Si observas las flechas, verás que en todos los casos las operaciones que hacemos equivalen a multiplicar 3×80 (o bien, 80×3) y a dividir entre 2. Esto es, mientras sigas una táctica similar para poner la información conocida y la que deseas conocer, el resultado siempre será el mismo.

Lo único que debes cuidar es conservar el mismo criterio para asignar las columnas y los renglones (observa el cuadro de la derecha, que es incorrecto).

2 kg	\$80
$x = ?$	3 kg

Unos de los problemas de “valor perdido” –o de “cuarta proporcional”– más conocidos son los problemas que tienen que ver con porcentajes; a ellos está dedicada la última sección de este capítulo.

Más ejemplos de regla de tres

La regla de tres es, como hemos visto, una herramienta muy útil para resolver problemas de “valor perdido” o de “cuarta proporcional” cuando se sabe que hay una relación de proporcionalidad directa entre dos variables. Veamos algunos ejemplos más de aplicación de la regla de tres. Como siempre, te recomendamos que verifiques los resultados con tu calculadora.

- En una receta de chiles en nogada se indica que para 12 chiles se requieren 500 g de carne molida. ¿Cuánta carne se necesitará para preparar 20 chiles en nogada? Podemos hacer un cuadro como el de la derecha y entonces calculamos

12 chiles	500 g
20 chiles	$x = ?$

$$x = \frac{20 \times 500}{12} = 833.33 \text{ g}$$

(En la práctica, tal vez compraríamos 850 gramos)

- Se pintó un cuarto mezclando 5 litros de pintura verde con 2 litros de pintura amarilla. Faltó un poco de mezcla y se desea llegar al mismo color usando $\frac{1}{4}$ de litro de pintura verde. ¿Cuánta pintura amarilla se necesita? El cuadro puede quedar como el de la derecha, y el cálculo es:

$\frac{1}{4}$ L verde	$x = ?$
5 L verde	2 L amarilla

$$x = \frac{\frac{1}{4} \times 2}{5} = \frac{0.25 \times 2}{5} = 0.1 \text{ L de pintura amarilla (100 mL)}$$

- Para preparar nixtamal se agregan 7.5 gramos de cal a medio kilo de maíz. ¿Cuánta cal se agrega para preparar nixtamal con 2.7 kg de maíz? Podemos hablar de gramos de cal y de kilogramos de maíz, como en el cuadro de arriba, o de gramos de cal y de maíz, como en el cuadro de abajo (lo que no podríamos hacer es, en el renglón del maíz, poner 2.7 kg y 500 g: las unidades del maíz deben ser siempre las mismas). El cálculo es

$x = ?$	7.5 g
2.7 kg	0.5 kg

$x = ?$	7.5 g
2700 g	500 g

$$x = \frac{2.7 \times 7.5}{0.5} = \frac{2700 \times 7.5}{500} = 40.5 \text{ gramos de cal}$$

- Un automóvil se tarda 6:15 horas en recorrer 532 km. ¿Cuánto tiempo necesitará para recorrer, a la misma velocidad, un trayecto de 713 km? Antes de plantear el cuadro, conviene pasar a notación decimal las 6:15 horas. Ese tiempo equivale, como vimos en el capítulo 2, a 6 horas más $\frac{1}{4}$ de hora o sea 6.25 horas. El cuadro puede quedar como el de la derecha, y al hacer los cálculos tenemos

6.25 hrs	532 km
$x = ?$	713 km

$$x = \frac{6.25 \times 713}{532} = 8.38 \text{ horas}$$

Recordemos que 8.38 horas son algo *menos* de 8 horas y media, porque 0.38 es una fracción decimal. Conviene regresar el resultado a horas y minutos, viendo que 0.38 de hora son

$0.38 \times 60 = 23$ minutos. Es decir, el automóvil tardará 8:23 horas.

5.2.2. Problemas de comparación de razones

Reconsideremos el ejemplo de frijoles y lentejas:

Si 2 kg de frijoles cuestan \$90 y 5 kg de lentejas cuestan \$250, ¿qué legumbre está más barata, los frijoles o las lentejas?

Como dijimos, una manera de plantear la información es en un arreglo como el de abajo. También se podría decir que nos preguntamos cuál fracción es mayor, si $\frac{90}{2}$ o $\frac{250}{5}$.

	kilos	precio	
frijoles	2 kg	\$90	$\frac{90}{2} ? \frac{250}{5}$
lentejas	5 kg	\$250	

Para solucionar el problema se pueden utilizar varias estrategias. Aquí veremos dos:

- Una manera es encontrar los valores unitarios que tengan sentido. En este caso, podemos preguntarnos cuál es el precio por kilogramo de cada legumbre: el kilo de frijoles está a $90 \div 2 = \$45$, mientras que el kilo de lentejas está a $250 \div 5 = \$50$. Están más baratos los frijoles que las lentejas.
- Otra manera es encontrar fracciones equivalentes a cada una de las fracciones $\frac{90}{2}$ y $\frac{250}{5}$, pero referidas a la misma cantidad. Podríamos ver, por ejemplo, cuánto cuestan 10 kilos de cada una de las legumbres (tomamos 10 porque es múltiplo común de 2 y de 5). Así, 10 kilos de frijoles cuestan 5 veces lo que cuestan 2 kg, o sea $5 \times 90 = \$450$, mientras que 10 kilos de lentejas cuestan el doble de lo que cuestan 5 kg, o sea $2 \times 250 = \$500$. Este argumento, expresado con fracciones

equivalentes, es así: para los frijoles, $\frac{90}{2} = \frac{450}{10}$, mientras que para las lentejas, $\frac{250}{5} = \frac{500}{10}$. Esas fracciones equivalentes se pueden comparar y ahora tenemos que $\frac{90}{2} = \frac{450}{10} < \frac{500}{10} = \frac{250}{5}$. Con cualquiera de estas expresiones vemos que 10 kilos de frijoles valen menos que la misma cantidad de lentejas y, por lo tanto, están más baratos los frijoles que las lentejas.

5.2.3. Problemas de reparto proporcional

Reconsideremos el ejemplo de los tres trabajadores:

Katia, Gustavo y Yoali cobraron \$10,000 por un trabajo para el que Katia invirtió 27 horas, Gustavo 18 y Yoali 35.

¿Cuánto debe cobrar cada uno?

	Horas	Dinero
Katia	27	?
Gustavo	18	?
Yoali	35	?
TOTAL	80	\$10,000

Este problema es similar a los de valor perdido, con estas diferencias:

- lo que conocemos es el total de horas y el total de dinero (en la tabla, el último renglón): sabemos que los \$10,000 se deben repartir entre los tres trabajadores, proporcionalmente a la cantidad de horas que invirtió cada uno;
- no se trata de un solo valor perdido, sino de varios.

Aunque este tipo de problemas se pueden resolver de diversas maneras, aquí lo resolveremos mediante el valor unitario.

Podemos ver que los \$10,000 se pagaron por un total de 80 horas de trabajo, por lo que cada hora se pagó con $\frac{10000}{80} = \$125$, y por lo tanto a cada quien se le debe pagar \$125 por cada hora trabajada:

- para Katia $27 \times 125 = \$3375$
- para Gustavo $18 \times 125 = \$2250$
- y para Yoali $35 \times 125 = \$4375$

(Nunca sobra verificar que estamos repartiendo la cantidad correcta: efectivamente $3375+2250+4375 = \$10000$).

Hay otro tipo de problemas de reparto proporcional que se presentan de una manera un poco diferente. Veamos un ejemplo.

En una comunidad en la que hay 16,344 personas, por cada adulto mayor hay 2 adultos, 4 jóvenes y 5 niños. ¿Cuántos niños, jóvenes, adultos y adultos mayores hay? Si queremos usar una tabla similar a la anterior, podríamos plantearla así

	Relación por cada adulto mayor	Cantidades
Adultos mayores	1	?
Adultos	2	?
Jóvenes	4	?
Niños	5	?
TOTAL		16344

Sin embargo, nos falta el total de la columna “Relación...” para poder hacer cálculos como en el ejemplo anterior. Lo que podemos pensar es que hay “agrupaciones” formadas por 1 adulto mayor, 2 adultos, 4 jóvenes y 5 niños; es decir, 12 personas en total. Eso nos da una tabla como la siguiente:

	Conformación de cada “agrupación”	Cantidades
Adultos mayores	1	?
Adultos	2	?
Jóvenes	4	?
Niños	5	?
TOTAL	12	16344

Resolvamos el problema con el valor unitario. Encontramos que en total en la comunidad hay $\frac{16344}{12} = 1362$ agrupaciones. Entonces, como cada agrupación contribuye con:

- 1 adulto mayor, hay $1 \times 1362 = 1362$ adultos mayores
- 2 adultos, hay $2 \times 1362 = 2724$ adultos
- 4 jóvenes, hay $4 \times 1362 = 5448$ jóvenes, y
- 5 niños, hay $5 \times 1362 = 6810$ niños.

EJERCICIOS

Recuerda que los ejercicios con numeración par son similares a los que los preceden. Haz solamente aquellos que consideres necesarios para tu proceso de aprendizaje.

5.11. Resuelve las siguientes situaciones.

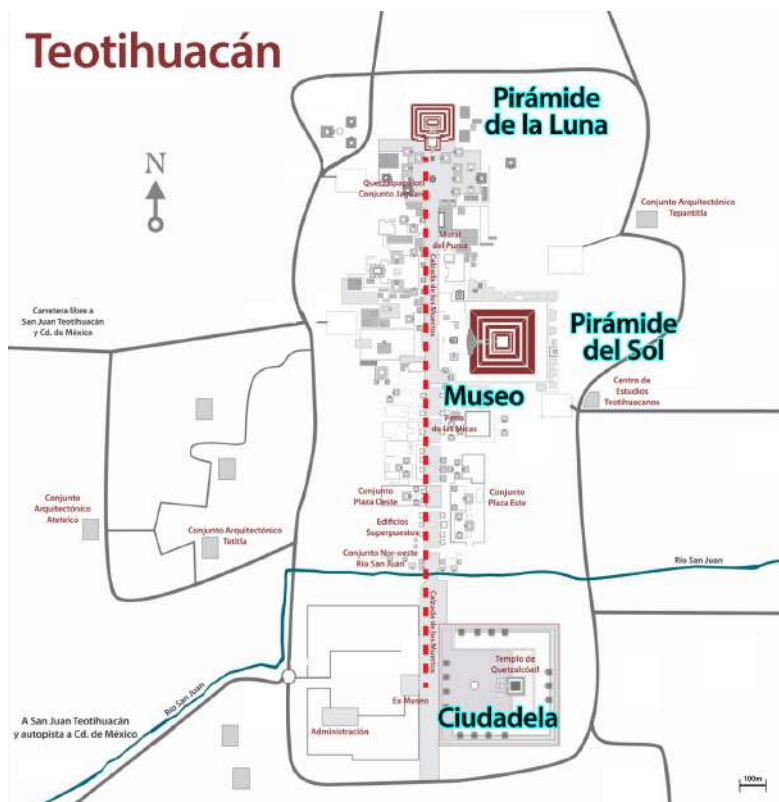
- a) Si para impermeabilizar un techo de 230 m^2 se utilizaron 26 litros de impermeabilizante, ¿cuánto impermeabilizante se necesita por metro cuadrado? Si el impermeabilizante se vende en cubetas de 19 litros a \$5000 o en botes de 4 litros a \$1500, ¿cuánto dinero es lo menos que habría que gastar en impermeabilizante?
- b) El semáforo en el cruce de dos calles da 40 segundos de tiempo a la luz verde de la calle principal y 25 segundos de tiempo a la luz verde de la calle secundaria. Si se quiere que en otro cruce se conserve esa misma razón de tiempo para el cruce de los vehículos de ambas calles, pero

que la luz verde de la calle principal dure 60 segundos, ¿cuánto tiempo debe durar la luz verde de la calle secundaria?

- c) Doña Mari prepara cubitos de concentrado de jamaica, que congela. El domingo preparó agua de jamaica diluyendo 5 cubitos en 2 litros de agua simple. Ahora le quedan 7 cubitos; ¿cuánta agua simple les debe agregar para que le quede el agua con el mismo sabor que el domingo?

5.12 Resuelve las siguientes situaciones.

- a) Si el rendimiento de una pintura es de 6 m^2 por cada litro, ¿cuántos litros se necesitarán para pintar una superficie de 45 m^2 ?
- b) El Sr. Ramírez cobra como vendedor de refrigeradores un salario de \$14,580 pesos mensuales más una comisión fija por cada refrigerador vendido. El mes de abril vendió 5 refrigeradores y cobró \$20,580. El mes de mayo vendió 12 refrigeradores, ¿cuánto cobró?
- c) Este es un plano del sitio arqueológico de Teotihuacán; la escala está marcada en la parte inferior derecha. Resuelve las siguientes tres interrogantes:
- ¿Cuánto mide de largo la “Calzada de los Muertos”, desde la Ciudadela hasta la Pirámide de la Luna?
 - ¿Cuánto mide de lado la base cuadrada de la Pirámide del Sol?
 - Incluyendo las calles que lo bordean, el Zócalo de la Ciudad de México tiene un área de $46,800 \text{ m}^2$; ¿es mayor o menor que la base de la Pirámide del Sol?



5.13. Resuelve las siguientes situaciones.

- Se preparan mezclas de pintura de color anaranjado. En la primera se mezclan 4 botecitos de color rojo con 6 botecitos de color amarillo, mientras que en la segunda se mezclan 6 de color rojo con 9 de color amarillo. ¿Cuál de las dos mezclas da un anaranjado más oscuro?
- Las pantallas de televisión normales, por cada 4 cm de ancho, tienen 3 cm de alto, mientras que las pantallas de alta definición tienen, por cada 16 cm de ancho, 9 cm de alto. ¿Con cuál de las dos razones las pantallas son proporcionalmente más anchas?
- Anamari presenta dos exámenes con preguntas de 5 opciones. En el de Historia había 62 preguntas y obtuvo 47 “buenas”, mientras que en el

de Biología tuvo 28 “buenas” y 15 “malas”. ¿En qué materia obtuvo la mejor calificación?

5.14. Resuelve las siguientes situaciones.

- a) El fabricante de gorras “La cachucha” vende el ciento a \$3450, y el fabricante de las de marca “El chapulín” vende el medio millar a \$18000. Si se requiere comprar quinientas gorras, ¿cuál de los dos fabricantes las vende a mejor precio?
- b) En una colonia en la que todas las cuadras son iguales, Alicia camina cuatro cuadras en cinco minutos y Beatriz camina diez cuadras en doce minutos y medio. ¿Quién de las dos camina más rápido, o caminan a la misma velocidad?
- c) A la primera función del circo entraron 3 niños por cada 2 adultos y a la segunda función entraron 5 niños por cada 4 adultos. Si a la primera función entraron 120 niños, ¿cuántos adultos entraron? Si a la segunda función entraron en total 900 personas, ¿cuántos niños y cuántos adultos había? ¿A cuál de las dos funciones entraron proporcionalmente más niños?

5.15. Resuelve las siguientes situaciones.

- a) Para comprar un terreno, Carmen puso \$69,000, Mireya puso \$156,000 y Rosalinda puso \$123,000. Años después, lo vendieron en \$600,000. ¿Cuánto le debe tocar a cada una para respetar la proporción inicial?
- b) Para hacer un dibujo tejido se usan 3 bolas de hilo verde por cada 2 bolas de hilo azul y 4 bolas de hilo lila. Un mantel con ese tejido lleva 22 bolas de hilo; ¿cuánto se usa de cada color?

5.16. Resuelve las siguientes situaciones.

- a) En el testamento del Sr. Gómez se estipula que por cada moneda de plata que le deja a su hijo Luis, le deja 5 a Pedro, 3 a Josefa y 2 a Yessica. En total dejó 220 monedas de plata; ¿cuántas le tocaron a cada quien?
- b) Se preparó acero inoxidable con una aleación de los siguientes metales:

Hierro (691 kg), Carbono (800 g), Manganeso (20 kg), Fósforo (400 g), Azufre (300 g), Silicio (7.5 kg), Cromo (190 kg) y Níquel (100 kg). Después se desea preparar 800 kg de la misma aleación de acero inoxidable. ¿Cuánto debe usarse de cada metal?

- c) Lucía hizo un collar utilizando 20 cuentas de plata de 5 mm cada una, 12 cuentas de vidrio de 9 mm cada una, 16 cuentas de cuarzo de 8 mm cada una y 8 cuentas de jade de 13 mm cada una. El mayorista al que se lo llevó le encargó 100 collares con el mismo diseño del de la muestra pero que midieran 55 cm cada uno. ¿Cuántas cuentas de cada tipo debe comprar Lucía para poder surtir el pedido?

5.3. PORCENTAJES

5.3.1. ¿Qué son los porcentajes?

Los porcentajes son una clase particular de relaciones de proporcionalidad directa, en los que la constante de proporcionalidad está expresada con respecto a 100.

Veamos un ejemplo. Supongamos que queremos comparar el nivel educativo (licenciatura o bachillerato) del personal de dos oficinas. En la primera tra-

bajan 20 personas, de las cuales 15 tienen una licenciatura y en la segunda trabajan 25 personas, 17 de las cuales tienen una licenciatura.

	Oficina 1	Oficina 2
Licenciatura	15	17
Bachillerato	5	8
TOTAL	20	25

- Podemos ver este problema como uno de comparación de razones, es decir, plantearlo por ejemplo con esta pregunta: ¿en cuál oficina hay proporcionalmente más licenciados, en una en la que por cada 5 bachilleres hay 15 licenciados, o en una en la que por cada 8 bachilleres hay 17 licenciados?

- También lo podemos ver como uno de comparación de fracciones, es decir preguntarnos, por ejemplo, ¿en cuál oficina hay proporcionalmente más licenciados, en una en la que $\frac{15}{20}$ de los empleados tienen la licenciatura, o en una en la que $\frac{17}{25}$ de los empleados la tienen?

Como vimos anteriormente, una de las maneras de comparar dos fracciones es encontrarle, a cada una, una fracción equivalente de tal forma que las dos nuevas tengan el mismo denominador. Vamos a usar como ese denominador común el número 100; es decir, buscamos los dos números que nos dan estas fracciones equivalentes:

Para la primera oficina $\frac{15}{20} = \frac{?}{100}$ y para la segunda $\frac{17}{25} = \frac{?}{100}$

Y una manera de encontrarlas es usando una regla de tres para cada uno:

Para la primera oficina $? = \frac{15 \times 100}{20}$ y para la segunda $? = \frac{17 \times 100}{25}$

Entonces ya tenemos las fracciones equivalentes con el mismo denominador: para la primera oficina $\frac{15}{20} = \frac{75}{100}$ y para la segunda $\frac{17}{25} = \frac{68}{100}$. Y ya podemos comparar las dos fracciones:

$$\frac{15}{20} = \frac{75}{100} > \frac{68}{100} = \frac{17}{25}$$

Nuestro problema se ha convertido en el siguiente: ¿en qué oficina hay proporcionalmente más personas con licenciatura, donde hay 75 de cada

	Equivalencia de la Oficina 1	Equivalencia de la Oficina 2
Licenciatura	75	68
Bachillerato	25	32
TOTAL	100	100

100, o donde hay 68 de cada 100? Y la respuesta es ahora evidente: en la primera oficina. (Observa que las cantidades de trabajadores con bachillerato se obtienen restando a 100 los que tienen licenciatura).

Las razones referidas a la cantidad de 100 reciben el nombre de **porcentajes**, y usualmente se escriben con el símbolo %, que indica que

se está hablando de tantos por cien o de tantos por ciento. Tenemos, entonces, dos maneras de expresar estas dos relaciones:

- En la primera oficina las personas con licenciatura son 15 de cada 20 empleados; otra manera es decir que son 75 de cada 100, o, lo que es lo mismo, que son 75% (75 por ciento, o 75 de cada cien).
- En la segunda oficina las personas con licenciatura son 17 de cada 25; también se puede decir que son 68 de cada 100, o, lo que es lo mismo, que son 68% (68 por ciento, o 68 de cada cien).

Así, el símbolo % denota que se está hablando de una razón referida a la cantidad de 100 o de una fracción con denominador 100. Otras razones equivalentes a “15 de cada 20” son “3 de cada 4”, o “30 de cada 40”, etc., pero el único porcentaje equivalente a “15 de cada 20” es 75%; de la misma manera en que otras fracciones equivalentes a $\frac{15}{20}$ pueden ser $\frac{3}{4}$, o $\frac{30}{40}$, etc., pero la única con denominador 100 es $\frac{75}{100}$.

Ya sabemos que $\frac{75}{100} = 0.75$, por lo que podemos expresar el porcentaje 75% como 0.75. Si dividimos la cantidad de trabajadores con licenciatura de la primera oficina (15) entre los 20 que hay en total, también obtenemos ese número: $15 \div 20 = 0.75$.

Entonces, en el caso de la oficina 1 tenemos las siguientes expresiones, que son equivalentes:

- 15 de 20 trabajadores tienen licenciatura
- Tres cuartas partes de los trabajadores tienen licenciatura
- 75% de los trabajadores tienen licenciatura
- La proporción de trabajadores con licenciatura es 0.75

Hemos dicho que un porcentaje es una razón referida a 100. Pero también habíamos dicho que uno de los posibles significados de una razón es como fracción. Y además habíamos dicho que una fracción puede tener el significado de un número, de un operador, de un cociente o de una razón.

¿Cómo quedan, entonces, estos significados en los porcentajes? En nuestro ejemplo, el 75% de los trabajadores con licenciatura de la oficina 1 se puede interpretar como:

- **una razón:** 75% quiere decir que 75 *de cada* 100 trabajadores tienen licenciatura, y esa razón es equivalente a decir que 15 *de cada* 20 trabajadores tienen licenciatura.
- **un operador:** cuando decimos que 75% *de* 20 trabajadores tienen licenciatura, podemos encontrar cuántos son esos trabajadores con esta operación: $\frac{75}{100} \times 20$, que es lo mismo que $\frac{75 \times 20}{100} = 15$.
- **una constante de proporcionalidad:** cuando hablamos de 75% podemos hablar de conjuntos distintos en los que hay la misma proporción. Por ejemplo, si en la oficina 3 sabemos que 75% de los 432 empleados tiene licenciatura, ahora 75% son $\frac{75 \times 432}{100} = 324$
- **un cociente:** $75\% = 15 \div 20 = 0.75$
- **un número fraccionario**, ya sea un **número decimal**:
 $75\% = \frac{75}{100} = 0.75$
- ...o una **fracción**: $75\% = \frac{15}{20} = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$...

Cuando en el Capítulo 1 vimos los diversos sentidos que puede tener una fracción, dijimos que el uso queda determinado por el contexto. Lo mismo ocurre con los porcentajes. Así, al hablar de un porcentaje **de** una cantidad, lo estamos considerando como un operador; o al decir que 15 de cada 20 es 75%, lo estamos considerando como una razón.

Algunas observaciones sobre los porcentajes

Antes de ver cómo se resuelven las distintas operaciones que implican porcentajes, terminaremos este apartado haciendo algunas precisiones que pueden serte útiles.

- Algunas calculadoras tienen una tecla para calcular porcentajes, que aparece como . Nosotras no nos estamos refiriendo a esa tecla por dos razones: no todas las calculadoras científicas la tienen, y el uso de la tecla depende del modelo específico de calculadora. Si tu calculadora tiene la tecla , te recomendamos que leas con cuidado el instructivo y que procures seguir los cálculos del siguiente apartado utilizándola, para que adquieras confianza en su uso.
- Como vimos, una manera de interpretar un porcentaje como 25% es “25 de cada cien”. La manera de interpretar esto puede variar ligeramente según el contexto. Por ejemplo, si en una tienda hay un descuento de 25%, quiere decir que cada vez que se gastan \$100 hay un descuento de \$25, o cada vez que se gastan \$20 hay un descuento de \$5. Sin embargo, si se dice que 25% de las personas adultas de una región tiene una licenciatura, eso no significa que si se formaran grupos de 100 adultos, en cada grupo habrá necesariamente 25 personas con esa escolaridad, ni mucho menos que si se formaran grupos de 20 adultos necesariamente habrá en cada uno 5 licenciados, sino que *en general, a la larga*, aproximadamente la cuarta parte de toda la población de adultos de esa región tiene una licenciatura.
- Los porcentajes no necesariamente son números enteros. Por ejemplo, 31 de cada 57 son 54.3859649... %. Claro, podemos redondear este número a que no tenga ninguna cifra decimal (54%), o a que tenga una (54.4%) o dos cifras decimales (54.39%), y así sucesivamente.

- La cantidad de decimales que se utilizan para expresar un resultado depende del problema. Los porcentajes en general se expresan como números enteros, o cuando mucho con una cifra decimal, a menos de que sean muy pequeños.
- La interpretación de cada porcentaje depende del contexto. Consideremos, por ejemplo, el porcentaje 9.8% usado en estas dos frases: “este acero inoxidable tiene 9.8% de níquel”; y “9.8% de las mujeres adultas mide más de 1.68 m”. En el primer caso, 9.8% de níquel significa que en 100 kg de acero hay 9.8 kg de níquel, es decir, 9 kilogramos y 800 gramos. Se podría pensar que como no se puede hablar de 9.8 de persona, la segunda frase no tiene sentido; sin embargo, la afirmación es correcta y se refiere a que *a la larga*, en grupos grandes, 9.8% de las adultas son más altas que 1.68 m; por ejemplo, si en una región hay 1 millón de mujeres adultas, se puede esperar que aproximadamente 98,000 midan más de 1.68 m.
- Cuando los porcentajes son muy pequeños, es común que no se hable de tantos por cien sino de tantos por mil. Por ejemplo, en México el porcentaje de niños que mueren antes de cumplir el año de edad es de 1.73%, es decir, 1.73 de cada 100 niños. Este número también se puede expresar como 17.3 de cada 1,000 niños. Para eso se usa el símbolo ‰. Así, la mortalidad infantil en México es de 17.3‰, lo que se lee “17.3 por millar” o “17.3 de cada mil”. Incluso se llega a usar también el símbolo ‰ para referirse a “tantos por diez mil”. Por ejemplo, los niños que nacen con síndrome de Down son 12.5‰ (12.5 de cada diez mil).
- Para hablar de porcentajes o de tantos por mil o por diez mil es frecuente que se usen las palabras “**tasa**” e “**índice**”.* Así,

* Observa la homonimia de la palabra “índice”: un índice puede ser un dedo, un listado de capítulos o de temas en un libro según diferentes criterios, una razón, un porcentaje... y un “subíndice” es un número utilizado para etiquetar. También observa que “tasa” no es la misma palabra que “taza”.

se puede decir que en las principales ciudades mexicanas la tasa de subempleo es de 29.2%, que un banco otorga créditos a la tasa de 9.7% anual, o que la tasa de mortalidad infantil es de 17.3‰. Algunas veces tasa e índice se consideran como sinónimos, mientras que en algunos contextos los usos pueden ser más específicos; por ejemplo, una tasa puede ser la razón de una parte de la población con respecto a la población total, o la razón entre dos variables diferentes; mientras que un índice puede usarse para comparar las mediciones de un mismo aspecto en dos períodos de tiempo determinados, como el índice nacional de precios al consumidor.

- Los porcentajes no necesariamente son números menores que 100. Por ejemplo, si este año ingresaron a una universidad el triple de los que ingresaron el año pasado, podemos decir que ingresó un porcentaje de 300% de los del año pasado (300 de cada 100), o que el ingreso aumentó en 200% (200 más por cada 100).
- Los porcentajes no tienen unidades. Sin embargo, en la prensa es frecuente que se hable de “puntos porcentuales”; un punto porcentual es lo mismo que 1%. Por ejemplo, he aquí una noticia que todos quisiéramos ver: “la delincuencia disminuyó en 12 puntos porcentuales”.

- Siempre es conveniente preguntarnos “¿a qué se refiere 100%?”, es decir, ¿cuál es la cantidad que se está equiparando con

		Hombres	Mujeres	TOTAL
Remodelación	Cafetería	20	12	32
	Baños	10	38	48
	TOTAL	30	50	80

100%? Por ejemplo, se pregunta a los 30 hombres y las 50 mujeres que trabajan en una empresa si prefieren que se invierta dinero en remodelar la cafetería o los baños, y supongamos que se obtienen los resultados que se muestran en el cuadro.

Entonces, todas las afirmaciones siguientes son ciertas (¡verifica los resultados con tu calculadora!):

- 67% *de los hombres* prefiere remodelar la cafetería y 33% los baños ($\frac{20}{30}$ y $\frac{10}{30}$);
- 24% *de las mujeres* prefiere remodelar la cafetería y 76% los baños ($\frac{12}{50}$ y $\frac{38}{50}$);
- 40% *de los trabajadores* prefiere remodelar la cafetería y 60% los baños ($\frac{32}{80}$ y $\frac{48}{80}$);
- 62.5% *de los que prefieren remodelar la cafetería* son hombres y 37.5% son mujeres ($\frac{20}{32}$ y $\frac{12}{32}$);
- 20.8% *de los que prefieren remodelar los baños* son hombres y 79.2% son mujeres ($\frac{10}{48}$ y $\frac{38}{48}$);
- 37.5% *de los trabajadores* son hombres y 62.5% son mujeres ($\frac{30}{80}$ y $\frac{50}{80}$);
- *de los trabajadores*, 25% son hombres que prefieren remodelar la cafetería, 12.5% son hombres que prefieren los baños, 15% son mujeres que prefieren remodelar la cafetería y 47.5% son mujeres que prefieren los baños ($\frac{20}{80}$, $\frac{10}{80}$, $\frac{12}{80}$ y $\frac{38}{80}$).

Observa que los porcentajes distintos corresponden también a totales diferentes (100% se refiere respectivamente a *los hombres*, *las mujeres*, *los trabajadores*, *los que prefieren remodelar la cafetería*, *los que prefieren remodelar los baños*, etc.). Para señalar el total es importante la palabra “**de**”. Por ejemplo, en la primera de las afirmaciones anteriores, se dice “67% **de** los hombres”. También podría decirse “**entre** los hombres, 67%...”. El total indica también cuál es el denominador de las fracciones (en este caso 30 hombres).

5.3.2. Problemas con porcentajes

Muchos de los problemas de porcentajes se pueden ver como problemas de proporcionalidad del tipo de “valor perdido” que vimos en la sección anterior.

Como hemos dicho, en un problema de valor perdido hay una relación entre cuatro números, y ahora sabemos que uno de los cuatro es el número 100. Entonces en una situación típica de porcentajes hay, además de 100, tres números, que podemos representar con estas letras: c , p y T . En general diremos que

una cantidad c es un porcentaje p de un total T .

Así, en el ejemplo de las dos oficinas, teníamos en la primera 20 trabajadores, de los cuales 15 tenían la licenciatura. Es decir, 15 es el 75% de 20. Con esos números tenemos la equivalencia de fracciones

$p = 75$	$c = 15$
100	$T = 20$

$$\frac{75}{100} = \frac{15}{20}$$

En general tendremos la siguiente equivalencia de fracciones:

$$\frac{p}{100} = \frac{c}{T}$$

Comúnmente se conocen, además del número 100, dos de los números p , c o T y se busca conocer el cuarto número que completa la equivalencia.

Aunque no es la única manera de resolver los problemas de porcentajes, aquí usaremos la regla de tres, que es una herramienta útil en todos los casos.

Este apartado consta de tres párrafos. En el primero veremos los tres tipos más importantes de problemas de porcentajes, que hemos llamado “simples” porque en ellos solamente hay una regla de tres con tres cantidades conocidas y una desconocida. En

el segundo párrafo presentamos problemas de cambio porcentual, en los que además de la regla de tres, es necesario realizar otras operaciones. El último consiste en una serie de observaciones que te pueden resultar de utilidad al resolver problemas de porcentajes.

Problemas simples

Los problemas simples de porcentajes caen en una de las siguientes categorías para la regla de tres (que hemos denominado I, II y III):

- I) Queremos encontrar qué porcentaje es una cantidad dada c de un total T conocido. Conocemos c y T (marcados con letras negritas en el esquema) y buscamos p .

$p=?$	c
100	T

- II) Queremos encontrar cuánto es un porcentaje p dado de un total T conocido. Conocemos p y T (marcados con letras negritas en el esquema) y buscamos c .

p	$c=?$
100	T

- III) Queremos encontrar cuál es el total T del que una cantidad c dada es un porcentaje p conocido. Conocemos p y c (marcados con letras negritas en el esquema) y buscamos T .

p	c
100	$T=?$

A continuación, se muestran ejemplos de cada una de las tres situaciones. Como siempre, te proponemos que verifiques los cálculos en tu calculadora.

Problemas de tipo I:

conocemos c y T ; ¿qué porcentaje es c de T ?

- Queremos saber qué porcentaje es 21 de 43. Podemos expresar el problema como $\frac{?}{100} = \frac{21}{43}$ o como se ilustra en el

cuadro de la derecha. La operación es entonces $? = \frac{100 \times 21}{43}$ y su solución es 48.8%. Es decir, 48.8% de 43 es 21.

?	21
100	43

- En una tienda, 247 personas solicitaron crédito el mes de noviembre y 532 lo hicieron en diciembre. ¿Qué porcentaje de las solicitudes de noviembre son las de diciembre? Podemos expresar el problema como $\frac{?}{100} = \frac{532}{247}$ o como se ilustra en el cuadro de la derecha. La operación es entonces $? = \frac{100 \times 532}{247}$ y su solución es 215%*. Es decir, 215% de 247 es 532; las solicitudes de crédito de diciembre son 215% de las de noviembre.

?	532
100	247

- Si con las obras en una ciudad una persona se tarda en llegar a su trabajo 12 minutos más de los 45 que se tardaba previamente, ¿en qué porcentaje aumentó su tiempo de traslado? La operación es $? = \frac{12 \times 100}{45}$ y su solución es 26.666..., es decir, 27%. La persona se tarda en llegar a su trabajo 27% más de lo que hacía antes de las obras.

?	12
100	45

- ¿En qué porcentaje disminuyó un producto en una venta de rebaja si antes valía \$26.30 y le rebajaron \$5.80? La operación es $? = \frac{100 \times 5.80}{26.30}$ y su solución es 22%. La disminución de precio fue de 22%.

?	5.80
100	26.30

* Aquí estamos expresando el resultado sin cifras decimales. Como dijimos anteriormente, la cantidad de decimales que se utilizan para expresar un resultado depende del problema.

Problemas de tipo II:

conocemos el porcentaje y T; ¿de qué cantidad se trata?

- Queremos saber cuánto es 5.6% de 62. Podemos expresar el problema como $\frac{5.6}{100} = \frac{?}{62}$ o como se ilustra en el cuadro de la derecha. La operación es entonces $? = \frac{5.6 \times 62}{100}$ y su solución es 3.47. Es decir, 5.6% de 62 es 3.47

5.6	?
100	62
- Para hacer un uniforme, se indica que la falda debe ser verde pero que 11% junto al borde debe llevar una aplicación de tela de color azul. Si una falda va a medir 0.71 m de largo, ¿cuánto debe ir cubierto con la tela azul? Podemos expresar el problema como $\frac{11}{100} = \frac{?}{0.71}$ o como se ilustra en el cuadro de la derecha. La operación es entonces $? = \frac{11 \times 0.71}{100}$ y su solución es 0.078. Es decir, 11% de 0.71 es 0.078; en la falda la aplicación de tela azul debe medir 0.078 m, o sea 7.8 cm.

11	?
100	0.71
- Si un médico le indica a una embarazada que cuando mucho debe subir 18% de lo que pesaba antes del embarazo, y ella pesaba 56 kg, ¿cuánto puede subir como máximo? La operación es $? = \frac{18 \times 56}{100}$ y su solución es 10. Durante su embarazo la mujer puede subir 10 kg.

18	?
100	56
- Si la nueva carretera es 15% más corta que la anterior, que mide 254 km, ¿cuánto más corta es? La operación es $? = \frac{15 \times 254}{100}$ y su solución es 38. La nueva carretera es 38 km más corta que la anterior.

15	?
100	254

Problemas de tipo III:

conocemos c y p; ¿cuánto es el total?

- Se sabe que 5.2 es 32% de cierto número, y queremos saber qué número es ese. Podemos expresar el problema como $\frac{32}{100} = \frac{5.2}{?}$

o como se ilustra en el cuadro de la derecha. La operación es entonces $? = \frac{100 \times 5.2}{32}$ y su solución es 16. Es decir, 5.2 es 32% de 16.

32	5.2
100	?

- En 2012 se anunció que la producción tequilera, que fue de 316 millones de litros, fue 124% de la de 2011. ¿De cuánto fue la producción de 2011? Podemos expresar el problema como $\frac{124}{100} = \frac{316}{?}$ o como se ilustra en el cuadro de la derecha. La operación es entonces $? = \frac{100 \times 316}{124}$ y su solución es 255. Es decir, 316 es 124% de 255; la producción tequilera de 2011 fue de 255 millones de litros.

124	316
100	?

- En una fábrica de adornos navideños contrataron para la producción del año a 11 trabajadores más, y esos trabajadores eventuales representan aproximadamente 34% de la planta de trabajadores regulares. ¿Cuántos trabajadores regulares trabajan en la fábrica? La operación es $? = \frac{100 \times 11}{34}$ y su solución es 32. En la fábrica hay 32 trabajadores regulares.

34	11
100	?

- En una tienda anuncian un descuento de 17% en abrigos. Si por un abrigo descontaron \$238, ¿cuánto costaba originalmente el abrigo? Podemos expresar el problema como $\frac{17}{100} = \frac{238}{?}$ o como se ilustra en el cuadro de la derecha. La operación es entonces $? = \frac{100 \times 238}{17}$ y su solución es 1400. Es decir, 238 es 17% de 1400; el abrigo costaba originalmente \$1,400.

17	238
100	?

Problemas de cambio porcentual

Entre los problemas de porcentajes, hay algunos en los que además de la regla de tres es necesario realizar otras operaciones:

- o bien antes de la regla de tres, para recabar toda la información necesaria para realizarla;
- o bien, después de la regla de tres, para completar los cálculos necesarios hasta llegar al resultado deseado.

Por ejemplo, si compramos un objeto cuyo precio es \$50 y tiene 16% de IVA, para conocer el monto a pagar tenemos que calcular lo que corresponde al IVA, que es 16% de 50, y sumarlo al valor del objeto comprado. Tenemos entonces que 16% de 50 son \$8, y el total a pagar son $50 + 8 = \$58$.

$p = 16$	$c = 8$
100	$T = 50$
	58

Esta situación es similar a la de los problemas anteriores, pero en este caso tuvimos que calcular c para poder llegar al resultado deseado: $T + c$.

Veamos otros ejemplos que implican operaciones aritméticas antes de aplicar la regla de tres, o después de haberla aplicado.

- *¿Qué porcentaje aumentó una escuadra si antes valía \$15.80 y ahora vale \$19.90?* Para poder aplicar la regla de tres debemos conocer c , y por la información que tenemos sabemos que $c = 19.90 - 15.80 = \$4.10$. Podemos ahora calcular ¿qué porcentaje es \$4.10 de \$15.80? La respuesta es $p = \frac{100 \times 4.10}{15.80} = 25.9$.

$p = ?$	$c?$
100	15.80
	19.90

Las dos operaciones se pueden realizar en un solo paso: $p = \frac{100 \times (19.90 - 15.80)}{15.80} = 25.9$. El aumento en el precio de la escuadra fue de 25.9%.

$p = ?$	4.10
100	15.80
	19.95

- *¿Qué porcentaje de su peso bajó una persona si antes pesaba 102 kg y ahora pesa 64 kg?* Inicialmente debemos averiguar c ; para ello debemos contestar la pregunta ¿cuántos kilos bajó? La respuesta es $c = 102 - 64 = 38$ kg. Conociendo c , podemos

$p = ?$	$c?$
100	102
	64

dar respuesta a la pregunta ¿qué porcentaje es 38 kg de 102 kg? La respuesta es $p = \frac{100 \times 38}{102} = 37$. Las dos operaciones se pueden realizar en una sola: $p = \frac{100 \times (102 - 64)}{102} = 37$. La persona perdió 37% de su peso.

$p = ?$	38
100	102
	64

- Una variante del problema anterior, con los mismos números, pero conociendo otros datos: ¿Qué porcentaje de su peso bajó una persona si ahora pesa 64 kg y bajó 38 kg? Ahora no conocemos el peso original y es lo primero que averiguamos: $T = 64 + 38 = 102$. Para conocer qué porcentaje es 38 kg de 102 kg, calculamos $p = \frac{100 \times 38}{102} = 37$. Las dos etapas se pueden realizar en una sola: $p = \frac{100 \times 38}{(64 + 38)} = 37$. La persona perdió 37% de su peso.

$p = ?$	38
100	¿T?
	64

$p = ?$	38
100	102
	64

- Si una pista es 12% más larga que otra que mide 200 m, ¿cuál es su longitud (l)? Primero nos preguntamos de cuánto es la diferencia entre las dos pistas, y obtenemos, mediante una regla de tres, $c = \frac{12 \times 200}{100} = 24$ m. Es decir, 24 m es lo que hay que sumarle a 200 m para obtener lo que mide la pista larga: $l = 200 + 24 = 224$ m. Las dos operaciones se pueden hacer juntas en un solo paso: $l = 200 + \frac{12 \times 200}{100} = 224$. La solución al problema es que la pista larga mide 224 m.

12	¿c?
100	200
	l = ?

12	24
100	200
	l = ?

- Si una persona se tarda en llegar a su trabajo por una ruta nueva 31% menos de la hora y cuarto que hacía por la ruta vieja, ¿cuánto tiempo (t) se tarda? Como siempre que lidiamos con horas y minutos conviene pasar a unidades más manejables, aquí podríamos traducir la hora y cuarto a $60 + 15 = 75$ minutos. Ahora nos preguntamos cuánto tiempo se ahorra y

31	¿c?
100	75
	t = ?

encontramos que es $c = \frac{31 \times 75}{100} = 23$ min, por lo que podemos calcular que por la ruta nueva se tarda $t = 75 - 23 = 52$ min. Las dos operaciones se pueden hacer juntas en un solo paso: $t = 75 - \frac{31 \times 75}{100} = 52$. La solución al problema es que la persona se tarda 52 min por la ruta nueva.

31	23
100	75
	$t = ?$

- *A un empleado le informaron que 4.5% de aumento de salario significa que su cheque por la quincena será de \$144 más que el de la quincena anterior. ¿De cuánto será su nueva quincena (q)?* Empezamos preguntándonos cuánto recibía antes del aumento: $T = \frac{100 \times 144}{4.5} = 3200$ y ahora le sumamos el aumento: $q = 3200 + 144 = \$3344$. Las dos operaciones se pueden hacer en una sola: $q = \frac{100 \times 144}{4.5} + 144 = 3344$. La solución al problema es que la nueva quincena será por \$3344.

4.5	144
100	$\nearrow$ ¿T?
	$q = ?$

4.5	144
100	3200
	$q = ?$

- *Los 16 trabajadores despedidos de una fábrica representaban 28% de la planta. ¿Cuántos trabajadores (t) quedan?* Nos preguntamos de qué cantidad es 16 el 28%; la respuesta, que es $T = \frac{16 \times 100}{28} = 57$, es el número de trabajadores en la fábrica antes de los despidos; a ese número hay que restarle 16 para obtener el número t que buscamos. Es decir, nos preguntamos ahora cuántos trabajadores quedan; la respuesta a esta segunda pregunta es $t = 57 - 16 = 41$. Las dos operaciones se pueden hacer juntas en un solo paso: $t = \frac{16 \times 100}{28} - 16 = 41$. La solución al problema es que quedan 41 trabajadores.

28	16
100	$\nearrow$ ¿T?
	$t = ?$

28	16
100	57
	$t = ?$

Los ejemplos que veremos a continuación difieren de los anteriores, puesto que no podemos aplicar directamente la regla de tres porque nos falta uno de los elementos involucrados, y

para obtener ese elemento primero debemos obtener un nuevo porcentaje.

- Un comerciante le gana 41% a los productos que revende. Si vende unos zapatos a \$1,269, ¿cuánto pagó por ellos al fabricante y cuánto dinero ganó con esa venta?* En primer lugar, replantearemos el problema. Sabemos que los \$1,269 que el comerciante cobra por los zapatos son 141% del precio en que él los compra (porque $100 + 41 = 141$). Ahora encontramos el precio de compra: $T = \frac{100 \times 1269}{141} = 900$ y por lo tanto la ganancia es $c = 1,269 - 900 = \$369$. El precio de compra también lo podíamos encontrar en un solo paso: $T = \frac{100 \times 1269}{(100 + 41)} = 900$. La solución al problema es que el comerciante pagó \$900 por los zapatos y ganó \$369 con la venta.

41	$c = ?$
100	$T = ?$
	1269

41	$c = ?$
100	900
141	1269

- En una tienda en la que ofrecen 25% de descuento sobre el precio de etiqueta cobraron \$360 por una blusa. ¿Qué precio marcaba la etiqueta y de cuánto dinero fue el descuento?* Empezamos replanteando el problema. Sabemos que los \$360 que se pagaron son 75% del precio de etiqueta (porque $100 - 25 = 75$). Entonces el precio de etiqueta es $T = \frac{100 \times 360}{75} = 480$ y también podemos saber que el descuento es $c = 480 - 360 = \$120$. Podíamos encontrar el precio de etiqueta en una sola operación: $T = \frac{100 \times 360}{(100 - 25)} = 480$. La solución al problema es que la etiqueta de la blusa decía que costaba \$480, y el descuento fue de \$120.

25	$c = ?$
100	$T = ?$
	360

25	$c = ?$
100	480
75	360

Variantes de los problemas anteriores

Haremos ahora comentarios sobre algunos de los problemas resueltos anteriormente: aumento del precio de la escuadra, disminución del peso de una persona, aumento de salario y despido en una fábrica.

- En el caso de la escuadra, que antes valía \$15.80 y ahora vale \$19.90, encontramos que el *aumento* (de \$4.10) era 25.9% del precio original. También podemos ver que el nuevo precio, \$19.90, es 125.9% del precio original. Efectivamente, $\frac{125.9 \times 15.80}{100} = 125.9$

25.9	4.10
100	15.80
125.9	19.90

- Para la persona que bajó de 102 kg a 64 kg, encontramos que la *disminución* (38 kg) era 37% del peso original. También podemos ver que el nuevo peso, 64 kg, es 63% del peso original, porque $\frac{100 \times 64}{102} = 63$.

37	38
100	102
63	64

- El empleado cobrará 4.5% de *aumento* y eso significará \$144 más que la quincena anterior. Antes del aumento su quincena era de \$3200 y ahora será de \$3344. También podemos decir que la nueva quincena será 104.5% de la anterior (observa que $\frac{104.5 \times 3200}{100} = 3344$).

4.5	144
100	3200
104.5	3344

- En la fábrica, los 16 trabajadores *despedidos* representaban 28% de la planta; encontramos que antes de los despidos había 57 trabajadores, cantidad que *disminuyó* a 41. También podemos decir que los trabajadores no despedidos son 72% de los que había antes (observa que $\frac{72 \times 57}{100} = 41$).

28	16
100	57
72	41

Algunas observaciones sobre los problemas de porcentajes

Para terminar este capítulo, deseamos resaltar algunas situaciones en las que los problemas de porcentajes pueden dar lugar a interpretaciones que no son correctas.

- Si un número es el resultado de aumentarle $x\%$ a otro, eso no significa que al restarle $x\%$ al segundo se obtiene el primero.

- Ejemplo: en una dulcería venden los chocolates en dos presentaciones: bolsas de \$80 y cajas de \$120. La diferencia de \$40 se puede ver tomando como referencia las bolsas o las cajas:

» si tomamos como referencia las bolsas, podemos decir que las cajas cuestan *50% más* que las bolsas, porque $\frac{120 - 80}{80} = \frac{40}{80} = 50\%$

» si tomamos como referencia las cajas, podemos decir que las bolsas cuestan *33% menos* que las cajas, porque $\frac{120 - 80}{120} = \frac{40}{120} = 33\%$

Observa entonces que al tomar como referencia las bolsas tenemos que las cajas cuestan 50% más, pero eso no significa que las bolsas cuesten 50% menos que las cajas (eso sería \$60, no \$80). Análogamente, al tomar como referencia las cajas, tenemos que las bolsas cuestan 33% menos, pero eso no significa que las cajas cuesten 33% más que las bolsas.

- Cuando se aplican sucesivamente dos o más porcentajes esto no significa que “se sumen” o “se resten” esos porcentajes.

- Ejemplo: en una tienda ponen el anuncio que aparece a la derecha, donde sugieren que el descuento que hacen es de 70%. Supon-

!!!ALFOMBRAS!!!
EN LA COMPRA DE SU 20% ALFOMBRA
LE HACEMOS
!!! 50% + 20%
DE DESCUENTO!!!

gamos que queremos comprar una alfombra de \$1000. Gracias al primer descuento deberíamos pagar el 50%, o sea \$500, y a esa cantidad le descontamos 20%, por lo que finalmente pagamos $500 - \frac{20 \times 500}{100} = \400 . Es decir, el descuento final no fue de 70% sino de 60%.

- Si se aplican un porcentaje a una cantidad y después otro porcentaje al resultado, da igual en qué orden se hagan las dos operaciones.

- Ejemplo: en una tienda hay 25% de descuento y en una compra queremos que nos den desglosado el Impuesto al Valor Agregado (IVA) de 16%; supongamos además que el producto que compramos vale \$800 antes de aplicar el descuento y el IVA. ¿Qué nos conviene más, que apliquen primero el IVA y luego nos hagan el descuento de 25%, incluyendo ahí el IVA, o que primero nos hagan 25% de descuento y luego nos cobren 16% de IVA sobre el precio rebajado? Veamos:

- » Si aplican primero el IVA, tendríamos una cuenta de $800 + \frac{16 \times 800}{100} = \928 , y si luego aplican el descuento pagamos en total $928 - \frac{25 \times 928}{100} = \696

- » Si aplican primero el descuento el producto nos cuesta $800 - \frac{25 \times 800}{100} = \600 , y si agregamos el IVA tendremos que pagar $600 + \frac{16 \times 600}{100} = \696

Es decir, a final de cuentas ¡pagamos lo mismo! Nosotros pagamos \$696, de los cuales \$600 van a la tienda y \$96 al pago del impuesto.

- Las situaciones de aumento o disminución porcentual pueden interpretarse de muchas maneras correctas. El asunto a cuidar, como siempre que se habla de porcentajes, es cuál es la cantidad que se toma como 100% para las referencias.
- Ejemplo: una persona ganaba \$3200 y ahora gana \$5000. Todas las afirmaciones siguientes son ciertas:

- » recibió un 56.25% de aumento
 $\left(\frac{(5000 - 3200) \times 100}{3200} = 56.25\% \right);$

- » ahora gana 56.25% **más** de lo que ganaba antes
 $\left(\frac{(5000 - 3200) \times 100}{3200} = 56.25\% \right);$

- » ahora gana 156.25% de lo que ganaba antes
 $\left(\frac{(5000 \times 100)}{3200} = 156.25\% \right);$

- » antes ganaba 36% **menos** de lo que gana ahora
 $\left(\frac{(5000 - 3200) \times 100}{5000} = 36\% \right);$
- » antes ganaba 64% **de** lo que gana ahora
 $\left(\frac{(3200 \times 100)}{5000} = 64\% \right)$

EJERCICIOS

Los ejercicios de esta sección son de dos clases: los numerados del 5.17 al 5.34 son ejercicios prácticos de resolución de las situaciones presentadas, mientras que los numerados del 5.35 al 5.44 son problemas referentes a diversos contextos.

Recuerda que los ejercicios con numeración par son similares a los que los preceden. Haz solamente aquellos que consideres necesarios para tu proceso de aprendizaje.

5.17. Contesta las siguientes preguntas:

- a) ¿Qué porcentaje es 5 de 560? c) ¿Qué porcentaje es 1.5 de 4.5?
 b) ¿Qué porcentaje es 65 de 32? d) ¿Qué porcentaje es 0.4 de 20?

5.18. Contesta las siguientes preguntas:

- a) ¿Qué porcentaje es 12 de 65? f) ¿Qué porcentaje es 350 de 900?
 b) ¿Qué porcentaje es 175 de 1050? g) ¿Qué porcentaje es 5.9 de 25?
 c) ¿Qué porcentaje es 0.8 de 10? h) ¿Qué porcentaje es 158 de 60?
 d) ¿Qué porcentaje es 1.08 de 950? i) ¿Qué porcentaje es 50 de 1050?
 e) ¿Qué porcentaje es 4.5 de 1.2? j) ¿Qué porcentaje es 3.4 de 34?

5.19. Contesta las siguientes preguntas:

- a) ¿Cuánto es 36% de 78.2? c) ¿Cuánto es 3.2% de 149?
 b) ¿Cuánto es 0.85% de 1050? d) ¿Cuánto es 120% de 0.44?

5.20. Contesta las siguientes preguntas:

- | | |
|-----------------------------|------------------------------|
| a) ¿Cuánto es 23% de 5900? | e) ¿Cuánto es 2% de 56? |
| b) ¿Cuánto es 16% de 7.77? | f) ¿Cuánto es 3.6% de 78? |
| c) ¿Cuánto es 0.1% de 2000? | g) ¿Cuánto es 0.85% de 1025? |
| d) ¿Cuánto es 121% de 12.1? | h) ¿Cuánto es 1036% de 7800? |

5.21. Contesta las siguientes preguntas:

- | | |
|---------------------------------|-------------------------------|
| a) ¿De cuánto es 0.098 el 76%? | e) ¿De cuánto es 0.9 el 56%? |
| b) ¿De cuánto es 777 el 16%? | f) ¿De cuánto es 8.6 el 120%? |
| c) ¿De cuánto es 1025 el 0.85%? | g) ¿De cuánto es 1.5 el 7.5%? |
| d) ¿De cuánto es 12 el 12%? | h) ¿De cuánto es 8 el 400%? |

5.22. Contesta las siguientes preguntas:

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| a) ¿De cuánto es 125 el 36%? | f) ¿De cuánto es 1 el 1000%? |
| b) ¿De cuánto es 76 el 9.8%? | g) ¿De cuánto es 0.67 el 37%? |
| c) ¿De cuánto es 6.5 el 1.6%? | h) ¿De cuánto es 96 el 158%? |
| d) ¿De cuánto es 5 el 5%? | i) ¿De cuánto es 0.3 el 33%? |
| e) ¿De cuánto es 4.2 el 0.13%? | j) ¿De cuánto es 6543 el 175%? |

5.23. Para cada uno de los siguientes incisos, encuentra el valor de x :

- | | |
|-----------------------------|-------------------------|
| a) x es 0.5% de 1,345,228 | d) $x\%$ de 0.35 es 4.2 |
| b) $x\%$ de 558 es 3.5 | e) x es 150% de 1680 |
| c) 180% de x es 2,340,500 | f) 33% de x es 359 |

5.24. Para cada uno de los siguientes incisos, encuentra el valor de x :

- | | |
|------------------------|---------------------------|
| a) 22% de 3547 es x | g) 0.13% de 0.13 es x |
| b) $x\%$ de 240 es 724 | h) $x\%$ de 55 es 5 |
| c) 0.7% de x es 671 | i) 243% de x es 0.14 |
| d) $x\%$ de 198 es 9.9 | j) $x\%$ de 1980 es 9.9 |
| e) 188% de 61 es x | k) 100% de 1 es x |
| f) 43% de x es 5487 | l) 12.34% de x es 43.21 |

5.25. Contesta las siguientes preguntas:

- a) ¿Cuánto quedó al sumarle 102% a 67?
- b) ¿Cuánto quedó al restarle 42% a 12?
- c) ¿Cuánto quedó al sumarle 0.37% a 1.5648?
- d) ¿Cuánto quedó al restarle 100% a 38.0298?

5.26. Contesta las siguientes preguntas:

- a) ¿Cuánto quedó al sumarle 8.5% a 6,204?
- b) ¿Cuánto quedó al restarle 10% a 10?
- c) ¿Cuánto quedó al sumarle 200% a 2.59?
- d) ¿Cuánto quedó al restarle 0.41% a 18,034?
- e) ¿Cuánto quedó al sumarle 0.15% a 68.01?
- f) ¿Cuánto quedó al restarle 1% a 0.08?

5.27. Contesta las siguientes preguntas:

- a) A un número se le agregó 0.57, que era su 50%. ¿Cuál fue el resultado?
- b) A un número se le restó 1452, que era su 11%. ¿Cuál fue el resultado?
- c) A un número se le agregó 804, que era su 137%. ¿Cuál fue el resultado?
- d) A un número se le restó 237, que era su 0.5%. ¿Cuál fue el resultado?

5.28. Contesta las siguientes preguntas:

- a) A un número se le agregó 1, que era su 10%. ¿Cuál fue el resultado?
- b) A un número se le restó 508, que era su 0.8%. ¿Cuál fue el resultado?
- c) A un número se le agregó 32, que era su 132%. ¿Cuál fue el resultado?
- d) A un número se le restó 0.38, que era su 69%. ¿Cuál fue el resultado?
- e) A un número se le agregó 0.918, que era su 0.41%. ¿Cuál fue el resultado?
- f) A un número se le restó 75, que era su 25%. ¿Cuál fue el resultado?

5.29. Contesta las siguientes preguntas:

- a) A un número se le sumó su 15% y el resultado fue 100. ¿Qué número era y cuánto se le sumó?
- b) A un número se le restó su 15% y el resultado fue 100. ¿Qué número era y cuánto se le restó?

- c) A un número se le sumó su 104% y el resultado fue 46. ¿Qué número era y cuánto se le sumó?
- d) A un número se le restó su 0.95% y el resultado fue 8.9156. ¿Qué número era y cuánto se le restó?

5.30. Contesta las siguientes preguntas:

- a) A un número se le sumó su 2.8% y el resultado fue 1.6. ¿Qué número era y cuánto se le sumó?
- b) A un número se le restó su 99% y el resultado fue 1,000,000. ¿Qué número era y cuánto se le restó?
- c) A un número se le sumó su 148% y el resultado fue 0.741. ¿Qué número era y cuánto se le sumó?
- d) A un número se le sumó su 200% y el resultado fue 56,907. ¿Qué número era y cuánto se le sumó?
- e) A un número se le restó su 200% y el resultado fue -7 . ¿Qué número era y cuánto se le restó?
- f) A un número se le restó su 18% y el resultado fue 18. ¿Qué número era y cuánto se le restó?

5.31. Para cada uno de los siguientes incisos, encuentra el valor de x :

- a) 35.03 más su 16% es x
- b) 81 menos su $x\%$ es 56
- c) z menos su 0.3%, que es 5.801, da x
- d) x menos su 2% es 80,000
- e) $x\%$ de z es 25, y además $z + 25 = 39$
- f) 0.672 menos su 75% es x
- g) z más su 20%, que es 308,880, da x
- h) 56 más su $x\%$ es 81
- i) x más su 48% es 2.97
- j) $x\%$ de z es 0.12, y además $z - 0.29 = 0.56$

5.32. Para cada uno de los siguientes incisos, encuentra el valor de x :

- a) x menos su 35.5% es 1,020
- b) 6.01 menos su $x\%$ es 3.74
- c) $x\%$ de z es 34,871, y además $z + 34,871 = 56,863$
- d) 0.468 más su 120% es x
- e) z más su 1.5%, que es 0.936, da x
- f) 3.2 más su $x\%$ es 13.2
- g) x más su 239% es 3.06
- h) $x\%$ de z es 1.403, y además $z - 1.403 = 0.002$
- i) 0.1 menos su 0.32% es x
- j) z menos su 88%, que es 1.047, da x

5.33. Resuelve las siguientes situaciones.

- a) Completa la siguiente tabla considerando que los artículos tienen un 25% de descuento

PRENDA	pantalón	camiseta	vestido	blusa	falda	blusa	falda
PRECIO MARCADO	\$300	\$50	\$500		\$275	\$180	
DESCUENTO				\$50			
MONTO A PAGAR							\$300

- b) En una universidad se inscribieron a 5831 alumnos de nuevo ingreso. Para el año entrante se espera inscribir a 8.2% más. ¿Cuántos alumnos más ingresarán el año entrante?
- c) En un grupo escolar hay 15 hombres y 28 mujeres. ¿Cuál es el porcentaje de mujeres en el grupo?
- d) De todas las vacas de un establo, 18, que representan el 67%, tienen más de 4 años. ¿Cuántas vacas hay en el establo?
- e) ¿A cuánto asciende el precio de un producto si costaba \$43.50 y ha aumentado en 18%?
- f) Un noticiero anunció que en cierta región la precipitación pluvial anual fue de 783 mm, lo que representa 14.2% más de lo que suele ser. ¿De cuánto suele ser la precipitación pluvial anual?

- g) Durante la llamada “cuesta de enero” una estufa pasó de costar \$6,199 a \$6,990 y un refrigerador pasó de costar \$8,399 a \$9,470. ¿Qué porcentaje de su precio subió cada electrodoméstico?
- h) En una dulcería se sabe que hay una merma de 27% por las “probaditas” de los clientes. Si sacan a la venta 27 kg de fresas caramelizadas a \$110 el kg, ¿cuánto obtendrán por la venta de esas fresas?
- i) El salario mínimo mensual en el D. F. durante 2009 fue de \$1644.00. Si en 2010 se dio un incremento de 4.86%, ¿a cuánto ascendió el salario mínimo mensual en 2010? En la zona C el salario mínimo mensual durante 2009 fue de \$1558.50. ¿En qué porcentaje era menor el salario mínimo en la zona C que en el D. F.?
- j) En la escuela “Josefa Ortiz de Domínguez”, que tiene 367 alumnos, tuvieron que recibir a los 143 de la “Leona Vicario” porque fue damnificada tras un huracán. ¿Qué porcentaje de la población normal tiene la escuela “Josefa Ortiz de Domínguez” mientras dura la remodelación de la otra?
- k) En una factura en que se pidió el IVA de 16% desglosado se especifica que se pagaron \$172.48 de IVA. ¿Cuánto se pagó en total?
- l) En un vivero se estima que 4.8% de los árboles plantados no se darán. Si el vivero debe entregar 2500 árboles, ¿cuántos se recomienda que plante como mínimo?
- m) Una compañía que fabrica computadoras anuncia en un folleto que sus nuevos modelos son más ligeros que los anteriores. En un lugar del folleto se indica que la disminución es de 1.1 kg y en otro que es de 30%, y se quiere saber si las dos informaciones son compatibles. Si no lo son, ¿por qué? Si sí lo son, ¿cuánto pesan los nuevos modelos?

5.34. Resuelve las siguientes situaciones.

- a) Un bebé nació pesando 3.200 kg, y al cabo de una semana pesó 2.950 kg. ¿Qué porcentaje de su peso inicial perdió?
- b) En una encuesta 258 personas de las 3000 entrevistadas opinaron que la calidad de cierto producto era buena. ¿Qué porcentaje de los entrevistados tienen buena opinión del producto?

- c) En una tienda indican que todo está con 20% de descuento. A un producto le descontaron \$62. ¿Cuánto costaba antes del descuento?
- d) Si un puerco en engorda pasó de 68 kg a 72 kg, ¿qué porcentaje de su peso subió?
- e) En cierta ciudad se planea cubrir, durante los primeros tres meses del año, 17% de la demanda de bacheo, que asciende a 1572 km. ¿Cuántos kilómetros se espera cubrir en esos meses?
- f) En cierta zona del país hay en la actualidad 2,598 alumnos en primaria y las autoridades educativas afirman que este año hubo un decremento en la matrícula de 2.5%. Indica cuántos alumnos hubo el año anterior.
- g) ¿Cuánto deberá pagarse por concepto de IVA en una compra de \$1322 (el impuesto es de 16%)?
- h) ¿A cuánto ascendió el monto de una compra si por concepto de IVA (16%) se pagó \$187?
- i) Por una licuadora cuyo precio normal era de \$829.90 se pagó \$789.90 en una barata. ¿De qué porcentaje fue el descuento?
- j) ¿A cuánto ascendieron el importe de la compra y el monto correspondiente a IVA (16%), si en total se pagaron \$3548?
- k) En una empresa se afirma que 34% de los empleados podrán elegir la fecha de sus vacaciones. Si 48 personas pudieron elegir sus vacaciones, ¿cuántos empleados tiene la empresa?
- l) En un programa de reforestación se plantan 1,830 arbolitos, y se estima que de esos se darán 95%. ¿Cuántos árboles se estima que se darán?
- m) ¿Cuánto debo pagar por un producto cuyo precio en etiqueta es \$1364 y tiene 16% de IVA?
- n) A una persona con sobrepeso el médico que la puso a dieta le indicó que debía bajar 40% de su peso. Cuando lo logró había bajado 40 kg. ¿Cuánto pesa ahora?
- o) En un grupo de 40 alumnos 24 obtuvieron una calificación igual o mayor que 8. ¿Qué porcentaje de alumnos obtuvo la calificación mencionada?
- p) En una tienda descontaron \$48.50 por un producto que tenía 14% de descuento. ¿Cuánto se pagó al final?
- q) ¿A cuánto ascendieron el importe de la compra y el monto correspondiente a 25% de descuento, si en total se pagaron \$2535?

5.35. Resuelve los siguientes problemas:

- a) A una universidad que tenía un presupuesto anual de \$246,600,000 le fue otorgado un aumento presupuestal de \$3,500,000, con la condición de que aumentaran la matrícula en la misma proporción. Si el año pasado la matrícula fue de 5213 alumnos, ¿de cuántos debe ser ahora?
- b) Un comercio tiene dos casas: una matriz y una sucursal. En el mes de noviembre las ganancias fueron de \$124,051 en la matriz y de \$70,084 en la sucursal. Con las ventas decembrinas se obtuvo 25.3% más de ganancias en la matriz y 19.2% más en la sucursal. El dueño decide invertir 10% de las ganancias totales por igual entre ambas casas, para remodelación. ¿Qué porcentaje de las ventas de diciembre recibe cada casa?
- c) Un jugador apuesta un día en un casino \$5,230, y gana el 14%. Con todo ese dinero regresa el día siguiente y lo vuelve a apostar, pero ahora pierde el 16%. En total, ¿gana o pierde? ¿En qué porcentaje?
- d) Un artículo cuyo precio de contado es \$3450 se ofrece a pagar a 52 cuotas semanales de \$113. Con respecto a lo que se paga de contado, ¿en qué porcentaje es más caro comprar el artículo en cuotas?
- e) En un conjunto habitacional con casas unifamiliares y departamentos en edificios, los departamentos son el 83% de las viviendas y los edificios de más de 5 pisos son el 11% de los edificios. ¿Qué porcentaje de las viviendas son departamentos en edificios de más de 5 pisos?
- f) En una escuela en la que hay primaria y secundaria, se sabe que 61% de los alumnos son de primaria y que en secundaria hay 214 alumnos. También se sabe que en primaria hay 160 hombres y que en secundaria el 42% de los alumnos son mujeres. ¿Qué porcentaje de hombres y mujeres hay en toda la escuela?

5.36. Resuelve los siguientes problemas

- a) ¿Cuánto se debe pagar por un producto cuyo precio es de \$348 y tiene un descuento de 20% más un descuento de 15% sobre el precio descontado?
- b) En una región se sabe que 3500 de los 8237 hogares tienen luz eléctrica. ¿Qué porcentaje de los hogares carecen de luz eléctrica?

- c) Un maestro anuncia que la calificación final del curso estará compuesta en 50% por exámenes, 25% por un trabajo, 15% por tareas y el resto por asistencias. Jesús obtuvo un promedio de 7.8 en los exámenes y uno de 8.7 en las tareas; además tuvo 9.1 de calificación en el trabajo y asistió a la totalidad de las clases. ¿Cuál fue su calificación final?
- d) A una bodega llegan dos camionetas con palmas de adorno; la blanca entrega 33 y la azul 49. En la bodega ponen las palmas en macetas para su venta, y después las vuelven a subir a las camionetas, por partes iguales. ¿Qué porcentaje de más o de menos lleva cada camioneta a los sitios de venta?
- e) Un jugador apuesta en un casino, y después de ganar el 15% sale con \$38,940, que vuelve a apostar. Si en esa segunda apuesta pierde el 15%, ¿en qué porcentaje gana, pierde o queda igual, con respecto a su capital inicial?
- f) La publicidad de un banco ofrece un préstamo hasta por \$80,000 indicando que por cada \$1000 se deberán pagar \$123 (sin IVA) mensuales durante un año. ¿De qué porcentaje es el interés anual al que presta el banco? ¿Al cabo del año, cuánto paga el usuario por un préstamo de \$10,000 con todo e IVA de 16%?
- g) Para hacer una mezcla de pintura de color lila, primero se preparó una base rosa con 40% de rojo y 60% de blanco, y después se mezcló 70% de rosa con 30% de azul. ¿Qué porcentaje de cada color tiene la mezcla final?
- h) En una escuela técnica especializada hay tres carreras: gastronomía, turismo y hotelería. Los alumnos de hotelería son 37, y los 241 alumnos de turismo son 33.9% del total. Este año las colegiaturas son las mismas para las tres carreras, pero para el entrante se pretende subir en 10% las colegiaturas de turismo, en 15% las de gastronomía y en 8% las de hotelería. Si la cantidad de alumnos permanece igual en las tres carreras, ¿en qué porcentaje van a aumentar el año entrante los ingresos por colegiaturas?

5.37. En una papelería reetiquetaron la mercancía en el fin de semana entre el 31 de julio y el 3 de agosto, aumentando los precios en 11%. El resultado fue una baja en las ventas, por lo que se hizo una campaña publicitaria para atraer clientes, anunciando que durante el mes de septiembre se aplicarían distintos descuentos. Resuelve las siguientes situaciones:

- a) Una carpeta costaba \$275 en julio. ¿De cuánto fue el aumento en la reetiquetación?
- b) A un escritorio le subieron \$243.60 en la reetiquetación. ¿Cuánto costaba en julio?
- c) A un pizarrón que en agosto costaba \$1126 le descontaron \$91. ¿De qué porcentaje fue el descuento?
- d) Un juego de plumones costaba \$335 en julio. ¿Cuánto costaba en agosto?
- e) Un cartucho de impresora que en agosto estaba a \$936, en septiembre costaba \$890. ¿De qué porcentaje fue el descuento?
- f) Un estuche de bolígrafos costaba \$300 en julio. En la barata de septiembre se quiere que vuelva a costar los mismos \$300. ¿Qué porcentaje de descuento hay que aplicarle en septiembre?
- g) Una computadora costaba \$13271.99 en agosto. ¿Cuánto costaba en julio?

5.38. En una fábrica de galletas la producción disminuyó en 14.3% entre 2011 y 2012 en las cuatro líneas de producción (“cremas”, “rellenas”, “hojaldres” y “simples”). Después de un proceso de reorganización, en 2013 volvió a aumentar la producción, de manera distinta en las cuatro líneas. Resuelve las siguientes situaciones:

- a) En 2011 se usaron 1,250,000 kg de harina. ¿Cuánta se usó en 2012?
- b) En la línea de “cremas” se aumentó entre 2012 y 2013 la producción en 12%. En 2013 vendieron 40,000 cajas de “cremas”. ¿Cuántas vendieron en 2012 y cuántas en 2011?
- c) En 2013 se compraron para la línea de “cremas” 950 kg de emulsificante. ¿Cuánto se compró en 2012? ¿Y en 2011?

- d) En 2012 se produjeron 350,700 kg en la línea de “rellenas”, y en 2013 se produjeron 500,100 kg. ¿En qué porcentaje aumentó la línea de “rellenas”?
- e) La diferencia de lo que se utilizó de azúcar entre 2011 y 2012 fue de 875,000 kg. ¿Cuánto se usó en 2011?
- f) En 2011 se utilizaron 83,500 kg de mermelada. ¿Cuánto se utilizó en 2012?
- g) En 2012 se produjeron 51,000 cajas de la línea de “simples”. ¿En qué porcentaje debe aumentarse esta producción si se desea igualar la cantidad de cajas producidas en 2011?

5.39. A un conjunto de personas se les preguntó si preferían los perros o los gatos, y se obtuvieron los datos que se muestran en la tabla. Contesta las siguientes preguntas:

- a) ¿Qué porcentaje de los hombres prefieren los gatos?

	Perros	Gatos	TOTAL
Mujeres	32	37	69
Hombres	67	14	81
TOTAL	99	51	150

- b) ¿Qué porcentaje de los que prefieren gatos son hombres?

- c) ¿Qué porcentaje de las personas entrevistadas prefieren los perros?

- d) ¿Qué porcentaje de las personas entrevistadas son mujeres que prefieren los perros?

5.40. Para su campaña publicitaria, una compañía que fabrica helados desea conocer cuál de tres sabores prefieren los niños y los adolescentes. Entrevista a algunos y obtiene los resultados que se muestran en la tabla. Contesta las siguientes preguntas:

- a) ¿Qué porcentaje de los niños prefieren el chocolate?

	Niños	Adolescentes	TOTAL
Fresa	43	13	56
Chocolate	82	50	132
Vainilla	31	31	62
TOTAL	156	94	250

- b) ¿Qué porcentaje de los adolescentes prefieren el sabor fresa?

- c) ¿Qué porcentaje de los entrevistados no prefiere la vainilla?
- d) ¿Qué porcentaje de los que prefieren la vainilla son niños?
- e) ¿Qué porcentaje de los entrevistados son niños que prefieren el sabor fresa?
- f) ¿Qué porcentaje de los que no prefieren la vainilla son adolescentes?

5.41. En una zona se reportó que de las 2,000,000 de hectáreas de bosques y selvas que había en el año 2000 quedaban en 2010 sólo 1,800,000 hectáreas. Contesta las siguientes preguntas:

- a) ¿Qué porcentaje de la superficie de bosques y selvas se perdió en 10 años?
- b) ¿Qué porcentaje de lo que había en 2000 quedaba en 2010?
- c) ¿Qué porcentaje de lo que quedaba en 2010 había en 2000?
- d) ¿En qué porcentaje habría que reforestar la superficie actual para llegar nuevamente a los dos millones de hectáreas?

5.42. De acuerdo con los censos realizados por el INEGI, en el año 1990 había en México 81,249,645 habitantes, en el año 2000 había 97,483,412, y en el año 2010 había 112,336,538. Contesta las siguientes preguntas:

- a) ¿En qué porcentaje aumentó la población entre 1990 y 2000?
- b) ¿En qué porcentaje aumentó la población entre 2000 y 2010?
- c) ¿En qué porcentaje aumentó la población entre 1990 y 2010?
- d) ¿Qué porcentaje de la cantidad de habitantes de 2000 había en 2010?
- e) ¿Qué porcentaje de la cantidad de habitantes de 2000 había en 1990?
- f) ¿Qué porcentaje de la cantidad de habitantes de 1990 había en 2010?

5.43. En cada inciso, indica si la afirmación tiene sentido. En caso de que sí lo tenga, pon un ejemplo numérico que ilustre la afirmación. En caso de que no tenga sentido explica por qué.

- a) El 13.33% de los entrevistados está a favor del partido P**.
- b) En una región hubo una sequía que duró cuatro años, de 2003 a 2007. Con respecto al contenido que tenía la presa de la región a principios de 2003, disminuyó 40% en 2004, 30% en 2005, 40% en 2006 y 10% 2007.

- c) El precio del azúcar aumentó en 120%, y en ese mismo tiempo el precio de las computadoras disminuyó en 120%.
- d) Las personas que nacen con una cierta deformación congénita son el 8‰ de la población, es decir el 0.8% o el 80‰.
- e) El 0.50% de los nacidos en México durante 1999 fueron mujeres.

5.44. En cada inciso, indica si la afirmación tiene sentido. En caso de que sí lo tenga, pon un ejemplo numérico que ilustre la afirmación. En caso de que no tenga sentido explica por qué.

- a) Dos municipios tenían presupuesto para mejorar la red caminera. En uno de ellos se aumentó la red en 134%, y en el otro se reparó el 134% de los caminos existentes.
- b) En cierto país el 5% más rico de la población posee el 90% de la riqueza nacional.
- c) En una ciudad, una vía rápida contaba con dos carriles anchos. Ante el aumento de automóviles se repintó el asfalto para poner en el mismo lugar tres carriles más estrechos, y las autoridades dijeron que se había aumentado en 50% la capacidad de la vía rápida. Sin embargo, aumentó también el número de accidentes, por lo que volvieron a pintar dos carriles solamente. Las autoridades admitieron que se habían reducido en 33% la capacidad de la vía rápida, pero afirmaron que el resultado final era un aumento de $50\% - 33\% = 17\%$.
- d) Un paquete de pan integral con 25 rebanadas anuncia que cada rebanada tiene 20% más de fibra que el pan blanco de la misma marca.
- e) La cantidad de campesinos en cierta región es 72% de lo que era el año pasado.

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS

EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 1: NÚMEROS Y SU ORDEN

Sección 1.1: Números enteros

1.01.

- a) $8,203 + 12,097 = 20,300$: veinte mil trescientos
- b) $123,456,789 + 987,654,321 = 1,111,111,110$: mil ciento once millones ciento once mil ciento diez
- c) $301,100,100 - 300,101,001 = 999,099$: novecientos noventa y nueve mil noventa y nueve
- d) $10,200 - 5,130 = 5,070$: cinco mil setenta
- e) $50,021 \times 1,003 = 50,171,063$: cincuenta millones ciento setenta y un mil sesenta y tres
- f) $98,015 \times 245 = 24,013,675$: veinticuatro millones trece mil seiscientos setenta y cinco
- g) $15,015,015 \div 15 = 1,001,001$: un millón mil uno
- h) $2,024,040 \div 40 = 50,601$: cincuenta mil seiscientos uno
- i) $1,001^2 = 1,002,001$: un millón dos mil uno
- j) $\sqrt{251,001} = 501$: quinientos uno

1.02.

- a) $499^2 = 249,001$: doscientos cuarenta y nueve mil uno
- b) $\sqrt{1,040,400} = 1,020$: mil veinte
- c) $1,050,030 + 500,008 = 1,550,038$: un millón quinientos cincuenta mil treinta y ocho
- d) $840,007 - 645,020 = 194,987$: ciento noventa y cuatro mil novecientos ochenta y siete
- e) $1,001,110,144 \div 50,048 = 20,003$: veinte mil tres
- f) $808,008 + 707,007 = 1,515,015$: un millón quinientos quince mil quince
- g) $2,000,156,000 - 132,000,913 = 1,868,155,087$: mil ochocientos sesenta y ocho millones ciento cincuenta y cinco mil ochenta y siete
- h) $\sqrt{10,201,202,001} = 101,001$: ciento un mil uno
- i) $50,005^2 = 2,500,500,025$: dos mil quinientos millones quinientos mil veinticinco
- j) $101,300 \times 20,030 = 2,029,039,000$: dos mil veintinueve millones treinta y nueve mil
- k) $701,097,000 + 300,003,000 = 1,001,100,000$: un mil un millones cien mil
- l) $208,000 \times 20,008 = 4,161,664,000$: cuatro mil ciento sesenta y un millones seiscientos sesenta y cuatro mil
- m) $200,008 + 80,020 = 280,028$: doscientos ochenta mil veintiocho
- n) $10,000,000 - 1,369,075 = 8,630,925$: ocho millones seiscientos treinta mil novecientos veinticinco
- o) $1,005^3 = 1,015,075,125$: mil quince millones setenta y cinco mil ciento veinticinco
- p) $300,047 + 45,703 - 145,746 = 200,004$: doscientos mil cuatro

1.03.

- a) x es mayor que tres: 4, 5, 6, ...
- b) x es menor o igual que cinco: ..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5
- c) x es menor que menos cuatro: ..., -7, -6, -5
- d) x es mayor o igual que menos diez: -10, -9, -8, ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...
- e) x es mayor que menos ocho: -7, -6, -5, ..., -1, 0, 1, 2, 3, ...
- f) x es mayor o igual que cero y menor o igual que cinco: 0, 1, 2, 3, 4, 5

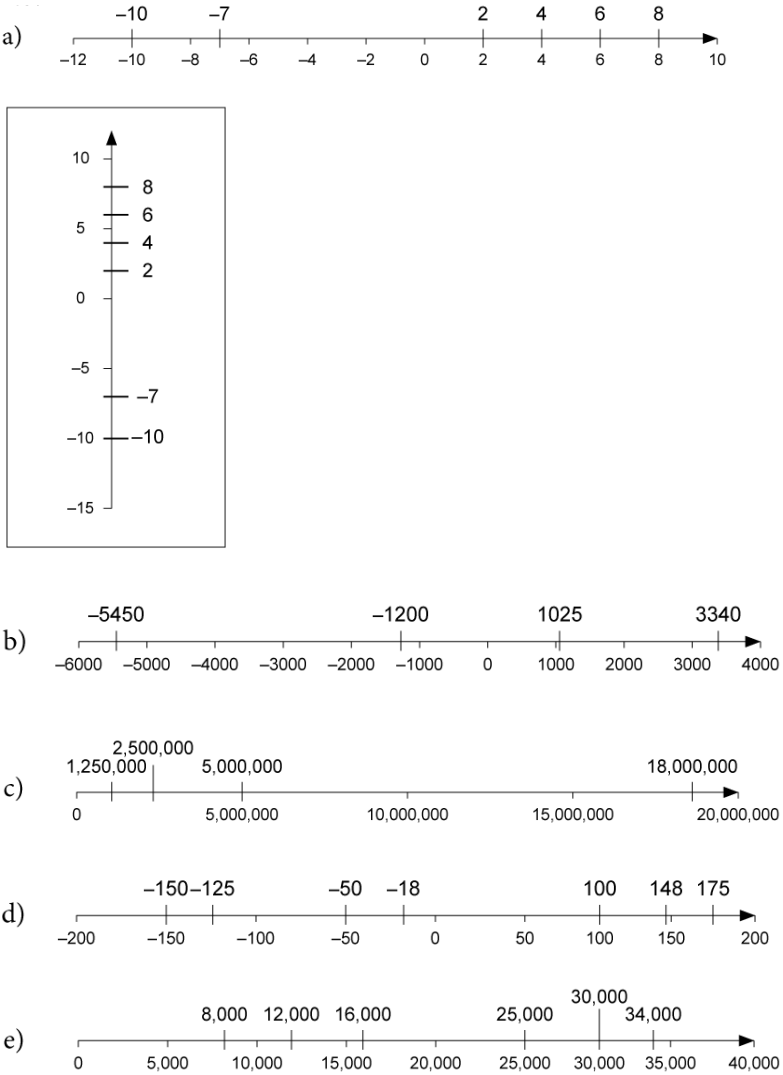
- g) x es mayor o igual que veinte y menor que treinta: 20, 21, ..., 27, 28, 29
- h) x es mayor que trece y menor que quince: 14
- i) x es mayor o igual que menos siete y menor que cuatro: $-7, -6, -5, \dots, -1, 0, 1, 2, 3$
- j) x es mayor que menos once y menor o igual que menos uno: $-10, -9, -8, \dots, -3, -2, -1$
- k) menos x es igual a dos: -2
- l) menos x es mayor que 3: $\dots, -7, -6, -5, -4$
- m) menos x es menor o igual que menos seis: 6, 7, 8, 9,
- n) menos x es mayor o igual que cero: $\dots -5, -4, -3, -2, -1, 0$
- o) menos x es mayor que menos dos y menor o igual que cero: 0, 1

1.04.

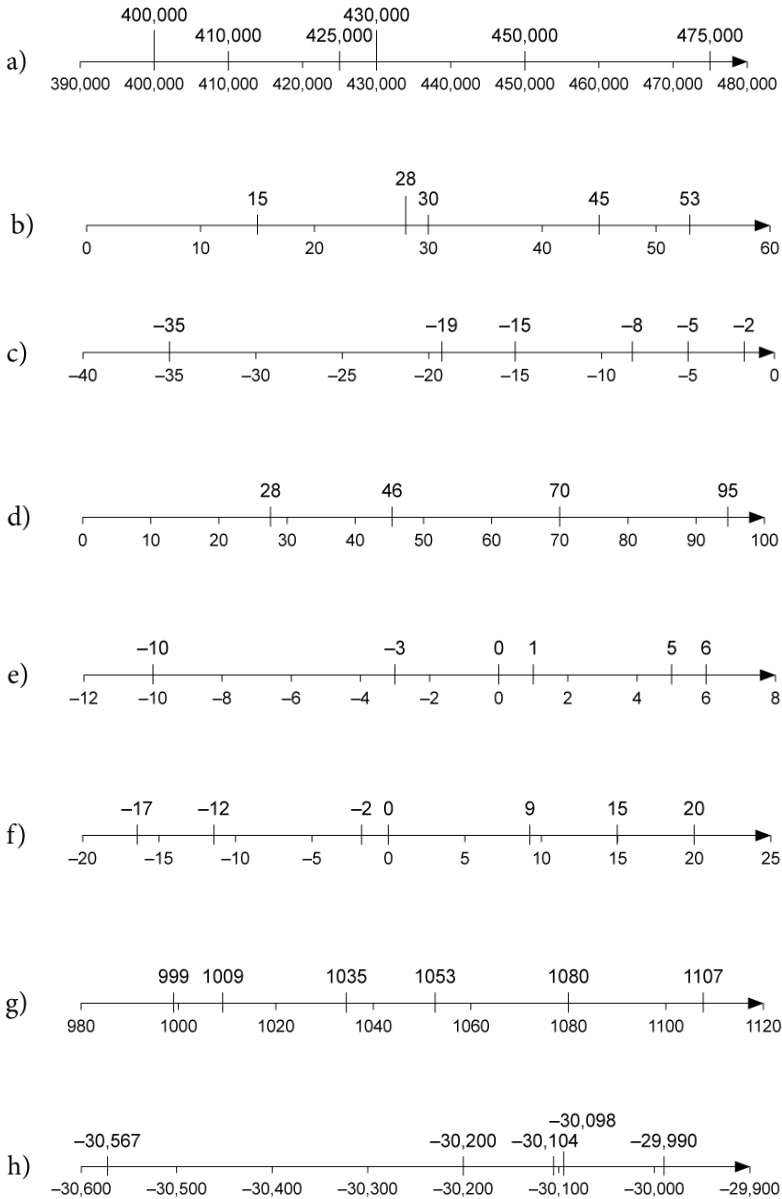
- a) x es menor que seis: $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$
- b) menos x es mayor o igual que cien: $\dots, -105, -104, -103, -102, -101, -100$
- c) menos x es mayor que cero: $\dots, -6, -5, -4, -3, -2, -1$
- d) x es menor o igual que cero: $\dots, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0$
- e) x es mayor que cero y menor que cinco: 1, 2, 3, 4
- f) x es mayor que cero y menor o igual que cinco: 1, 2, 3, 4, 5
- g) x es mayor o igual que cero y menor que cinco: 0, 1, 2, 3, 4
- h) x es mayor que menos cinco y menor que cero: $-4, -3, -2, -1$
- i) x es mayor o igual que menos cinco y menor o igual que cinco: $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$
- j) menos x es mayor que menos cinco y menor que cinco: $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$
- k) x es mayor que menos cinco y menor o igual que cinco: $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$
- l) x es mayor o igual que veinte y menor o igual que veinte: 20
- m) menos x es mayor o igual que menos ocho y menor o igual que menos tres: 3, 4, 5, 6, 7, 8
- n) x es mayor que menos doce y menor o igual que menos nueve: $-11, -10, -9$
- o) menos x es mayor que ciento veinticinco y menor que ciento treinta y dos: $-131, -130, -129, -128, -127, -126$

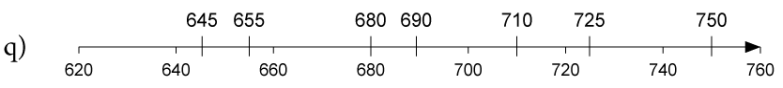
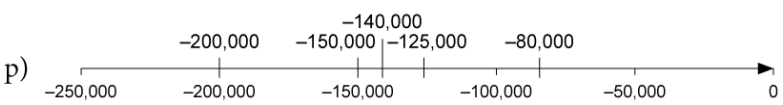
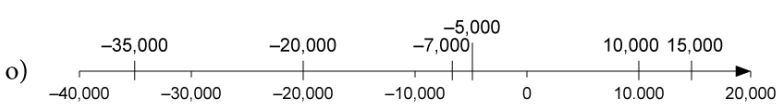
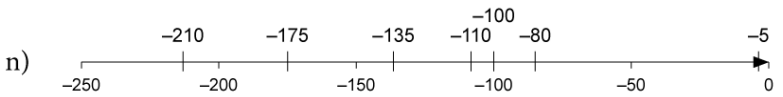
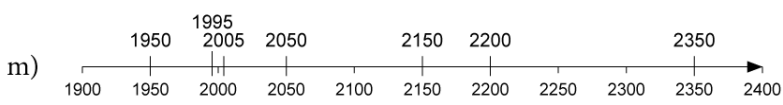
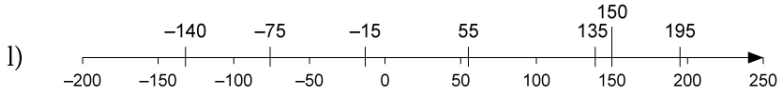
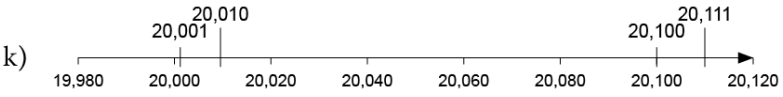
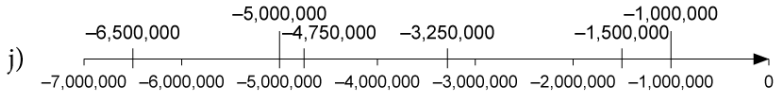
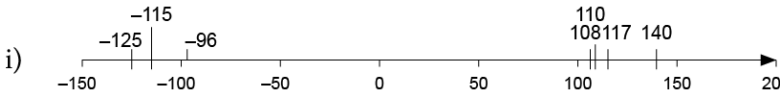
- p) menos x es mayor o igual que menos doscientos quince y menor que menos doscientos: 201, 202, 203, 204, ..., 212, 213, 214, 215
- q) menos x es mayor o igual que cero y menor que tres: -2, -1, 0
- r) menos x es mayor que cero y menor o igual que tres: -3, -2, -1

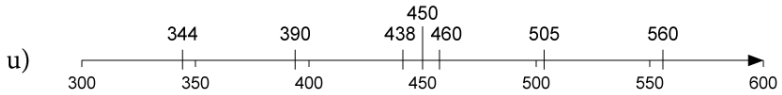
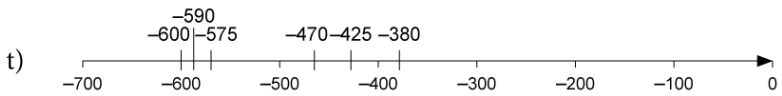
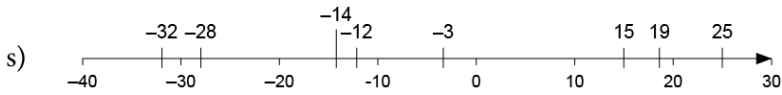
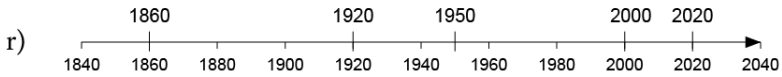
1.05. Aquí se muestran ejes horizontales, salvo en el inciso a), donde se muestra también un eje vertical.



1.06. Aquí se muestran ejes horizontales.



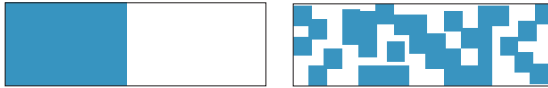




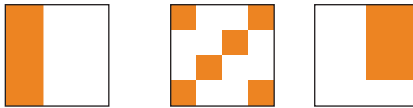
SECCIÓN 1.2: NÚMEROS RACIONALES

1.07. En los primeros incisos se dan varias representaciones de la fracción.

a) $\frac{7}{15}$



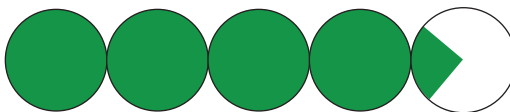
b) $\frac{3}{8}$



c) $\frac{7}{3}$



d) $\frac{17}{4}$



1.08.

a) $1\frac{3}{4}$



c) $\frac{1}{6}$



b) $\frac{3}{12}$

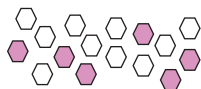


d) $\frac{17}{17}$



1.09.

a) $\frac{3}{8}$



c) $\frac{5}{4}$



b) $\frac{8}{7}$



d) $\frac{2}{3}$



1.10.

a) $\frac{2}{3}$



c) $\frac{3}{5}$



b) $\frac{1}{17}$



d) $\frac{5}{3}$



1.11.

a) $\frac{4}{11} = \frac{8}{22} = \frac{36}{99}$

c) $\frac{13}{17} = \frac{39}{51} = \frac{78}{102}$

b) $\frac{7}{4} = \frac{189}{108} = \frac{105}{60}$

d) $\frac{6}{3} = \frac{2}{1} = 2 = \frac{500}{250}$

1.12.

a) $\frac{15}{6} = \frac{5}{2} = \frac{75}{30}$

c) $\frac{79}{100}$

b) $\frac{18}{24} = \frac{6}{8} = \frac{36}{48}$

d) $\frac{90}{360} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = \frac{25}{100} = \frac{27}{108}$

1.13.

a) $\frac{4}{5} > \frac{16}{25}$

c) $\frac{13}{17} < \frac{23}{27}$

b) $\frac{6}{8} = \frac{9}{12}$

d) $\frac{6}{11} > \frac{25}{50}$

1.14.

a) $\frac{2}{3} > \frac{79}{179}$

c) $\frac{3}{12} = \frac{5}{20}$

b) $\frac{2}{3} < \frac{23}{29}$

d) $\frac{14}{7} > \frac{7}{14}$

1.15.

a) $M = \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$, $K = \frac{6}{3}$, $L = \frac{24}{4}$

b) $F = \frac{1}{7}$, $D = \frac{1}{4}$, $E = \frac{1}{3}$

c) $P = \frac{3}{8}$, $J = \frac{5}{8}$, $N = \frac{9}{8}$

1.16.

a) $W = \frac{1}{18}$, $T = \frac{2}{18}$, $V = \frac{1}{5}$

b) $G = \frac{2}{6} = \frac{12}{36}$, $X = \frac{4}{6}$, $S = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$

c) $H = \frac{10}{100}$, $U = \frac{21}{84}$, $Y = \frac{5}{9}$

1.17.

- a) 0.0680 b) 4.5000 c) 0.0625 d) 1.5000

1.18.

- a) 3.250000 b) 0.002500 c) 0.031250 d) 32.000000

1.19.

	Número	Decenas de millar	Unidades de millar	Centenas	Decenas	Unidades	Décimos	Centésimos	Milésimos	Diezmilésimos
a)	893.04	0	0	8	9	3	0	4	0	0
b)	18349.1538	1	8	3	4	9	1	5	3	8
c)	6.0008	0	0	0	0	6	0	0	0	8
d)	6.008	0	0	0	0	6	0	0	8	0
e)	6.08	0	0	0	0	6	0	8	0	0
f)	6.8	0	0	0	0	6	8	0	0	0
g)	6.8000	0	0	0	0	6	8	0	0	0
h)	10.50	0	0	0	1	0	5	0	0	0
i)	10.5	0	0	0	1	0	5	0	0	0
j)	10.500	0	0	0	1	0	5	0	0	0
k)	10.05	0	0	0	1	0	0	5	0	0
l)	10.050	0	0	0	1	0	0	5	0	0

1.20.

	Número	Decenas de millar	Unidades de millar	Centenas	Decenas	Unidades	Décimos	Centésimos	Milésimos	Diezmilésimos
a)	893.04	0	0	8	9	3	0	4	0	0
b)	12.0500	0	0	0	1	2	0	5	0	0
c)	0.0003	0	0	0	0	0	0	0	0	3
d)	0.003	0	0	0	0	0	0	0	3	0
e)	0.03	0	0	0	0	0	0	3	0	0
f)	0.0030	0	0	0	0	0	0	0	3	0
g)	0.030	0	0	0	0	0	0	3	0	0
h)	0.0300	0	0	0	0	0	0	3	0	0
i)	0.3	0	0	0	0	0	3	0	0	0
j)	10,085.406	1	0	0	8	5	4	0	6	0
k)	10,805.0460	1	0	8	0	5	0	4	6	0
l)	10,850.406	1	0	8	5	0	4	0	6	0
m)	18,005.0046	1	8	0	0	5	0	0	4	6
n)	10,085.4600	1	0	0	8	5	4	6	0	0
o)	10,085.4060	1	0	0	8	5	4	0	6	0

1.21.

- a) $4.506 = 4.5060$
 b) $-0.048 = -0.048000$
 c) $10.1 = 10.1000 = 10.10$
 d) $2.5 = 2.49999\dots$

1.22.

- a) $-0.5 = -0.500 = -0.50$
- b) $456.7899999... = 456.79 = 456.789999999...$
- c) $0.0026 = 0.00260$
- d) 99999 no es igual a ninguno de los otros números del inciso
- e) $-5706.5030 = -5706.503$
- f) $0.003 = 0.003000$
- g) -7.0803 no es igual a ninguno de los otros números del inciso

1.23.

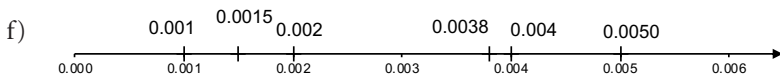
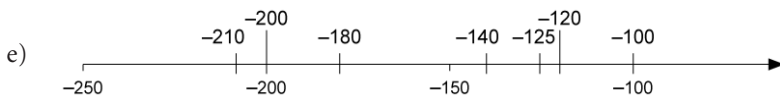
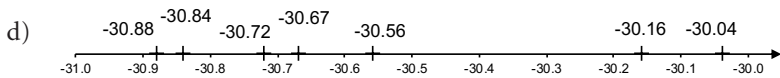
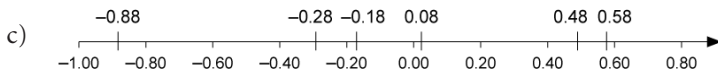
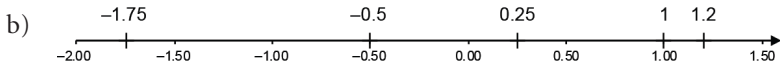
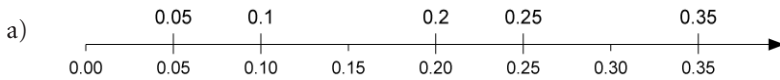
- a) $12.005 < 12.05 < 12.5 = 12.50 = 12.500$
- b) $-1.71 < -1.701 < -1.7 < 1.07 < 1.071$
- c) $-12.22 < -10.222 = -10.22200 < 10.02 < 10.2 < 12.02 < 12.022$
- d) $5.000345 < 5.03045 < 5.034 < 5.0345 < 5.3045 < 5.345$
- e) $-49.8 < -45.6 < -40.9 < -40.01 < 50.01 < 50.1 < 54.8$

1.24.

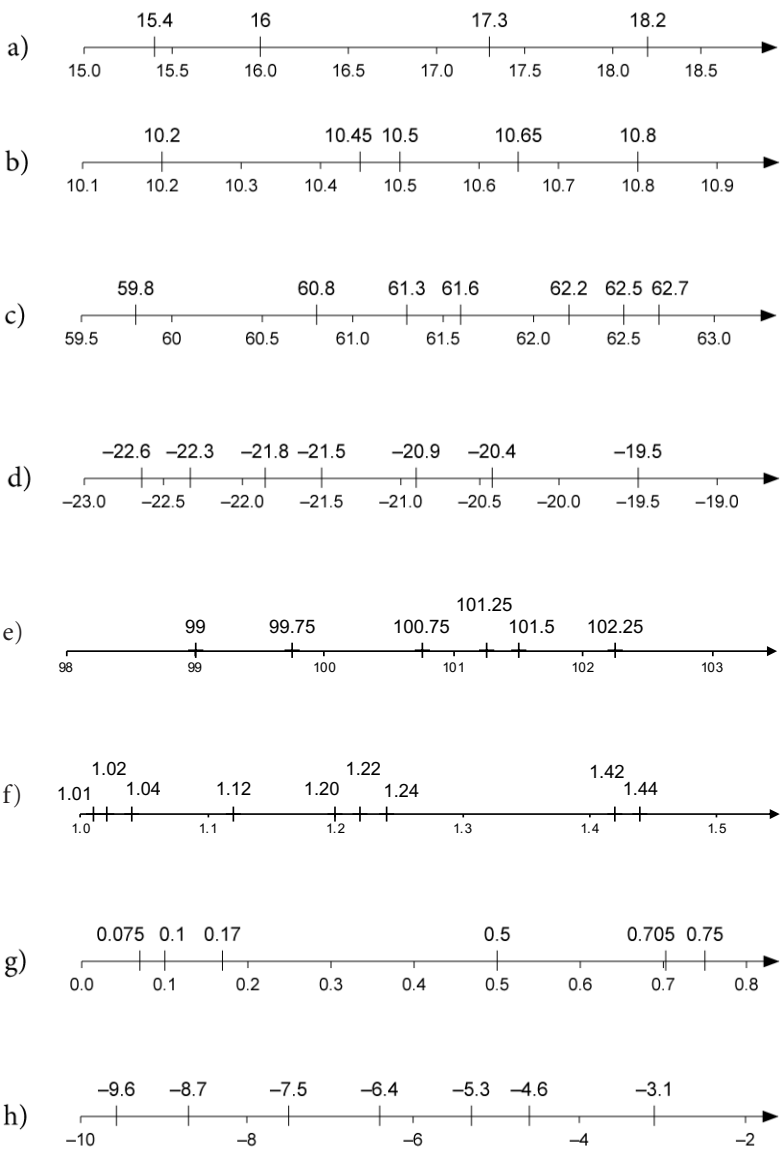
- a) $-1.3 < -0.8 < 0.06 < 1.54 < 5.004 < 5.4 = 5.40$
- b) $-2 < -1.96 < -1.64 < -1 < 1.86 < 1.96 < 2.3$
- c) $1.0085 < 1.0805 = 1.08050 < 1.085 = 1.0850 < 1.805 < 1.850$
- d) $-27 < -19 < -11 < -4 < 3 < 7 < 15 < 23$
- e) $0.09 < 0.097 < 0.7456 < 0.7843 < 0.875 < 0.89$
- f) $-1.75 < -1.749 < -0.687 < -0.62 < -0.078 < 0.1789$
- g) $-178.17 < -175.80 < -175.79 < -171.9 < -171.10 < -170.45$
- h) $0.001 < 0.09 < 0.10 < 0.11 < 0.9 < 0.91$
- i) $-3.456 < -3.45 < -2.345 < -2.34 < -1.23 < -1.1$
- j) $-31.25 < -18.72 < 10.56 < 10.567 < 18.7 < 47.415 < 47.42$
- k) $-580.7 < -580.07 < -508.70 < -500.87 < -500.087$
- l) $-0.188 < -0.180 = -0.18 < -0.108 = -0.1080 < -0.1008 < -0.018$
- m) $0.0045 < 0.0405 < 0.045 < 0.4005 < 0.405 < 0.450$
- n) $-0.909 < -0.11 < -0.101 < -0.099 < -0.09 < -0.011 < -0.01$
- o) $-5.45 < -5.4 < -5.05 < -5.04 < -4.54 < -4.50 < -4.05$

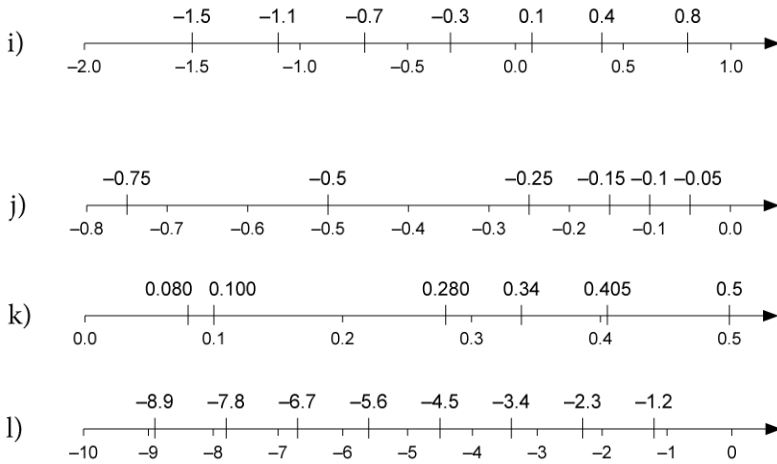
- p) $10078.3940 < 10087.30094 < 10780.3049 < 10807.3490 < 10870.3004$
 q) $-26000.05 < -20600.5 < -20600.05 < -20060.500 < -20060.05 < -20006.005$
 r) $0.0054 < 0.0504 < 0.054 < 0.4050 < 0.450 < 0.540 < 0.545$
 s) $-24.01 < -24.001 < -23.11 < -23.101 < -23.1 < -22.10 < -22.01$
 t) $3045678 < 3045867 < 3048675 < 3405678 < 3408765 < 3456780$

1.25. Aquí se muestran ejes horizontales, los números se podrían también representar en ejes verticales.



1.26. Aquí se muestran ejes horizontales, los números se podrían también representar en ejes verticales.

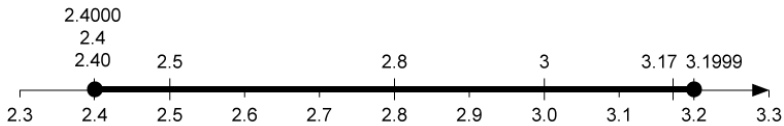




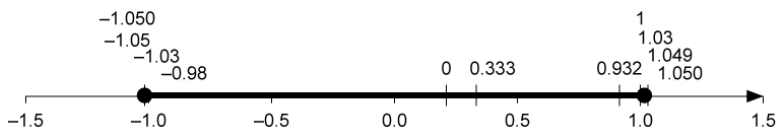
Sección 1.3: Números reales

1.27. En las siguientes gráficas se marca el intervalo abierto o cerrado en la forma usual y los números debajo de la recta numérica marcan la escala. Como retroalimentación adicional, arriba de la recta numérica se marca la ubicación aproximada de los números que pertenecen al intervalo.

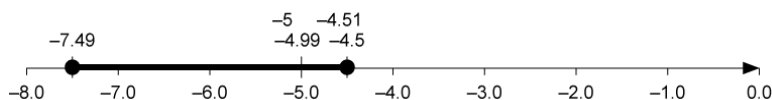
- a) Pertenecen al intervalo $[2.4, 3.2)$ los números: 3, 2.8, 3.1999, 2.4000, 3.17, $\frac{5}{2}$, 2.40



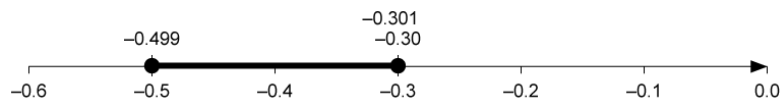
- b) Pertenecen al intervalo $[-1.05, 1.05]$ los números: 0 , 1 , -1.03 , 1.03 , $\frac{1}{3}$, 1.049 , 1.050 , 0.932 , -0.98 , -1.0500



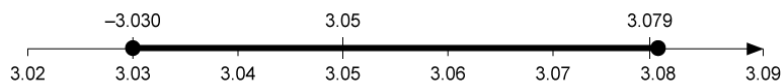
- c) Pertenecen al intervalo $[-7.5, -4.5]$ los números: -5 , -4.5 , -4.51 , -4.99 , -7.49



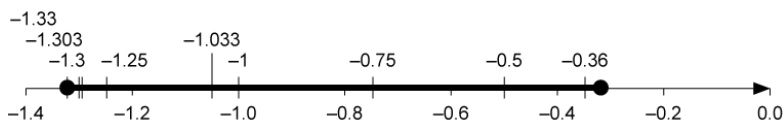
- d) Pertenecen al intervalo $(-0.5, -0.3]$ los números: -0.499 , -0.301 , -0.30



- e) Pertenecen al intervalo $[3.03, 3.08]$ los números: 3.05 , 3.079 , 3.030

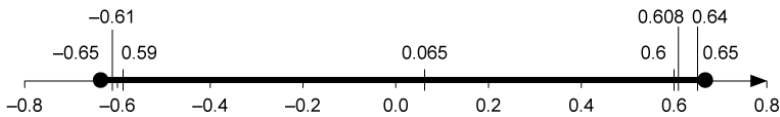


- f) Pertenecen al intervalo $(-4/3, -1/3)$ los números: -1 , -1.3 , $-1/2$, $-3/4$, $-5/4$, -1.33 , -0.36 , -1.033 , -1.303

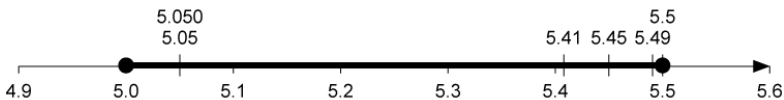


1.28. En las siguientes gráficas se marca el intervalo abierto o cerrado en la forma usual y los números debajo de la recta numérica marcan la escala. Como retroalimentación adicional, arriba de la recta numérica se marca la ubicación aproximada de los números que pertenecen al intervalo.

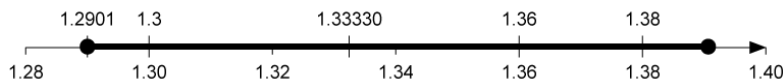
- a) Pertenecen al intervalo $[-0.65, 0.65]$ los números: -0.59 , $6/10$, -0.61 , 0.608 , 0.065 , -0.650 , 0.64



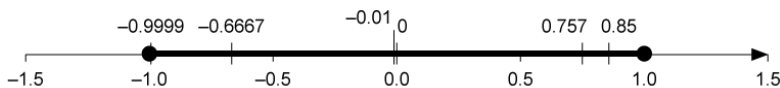
- b) Pertenecen al intervalo $(5, 5.5]$ los números: 5.05 , 5.50 , 5.45 , 5.49 , 5.050 , 5.41



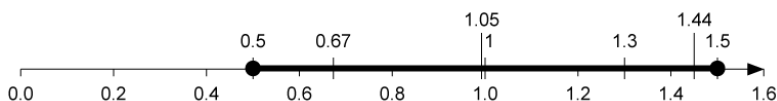
- c) Pertenecen al intervalo $(1.29, 1.39)$ los números: 1.36 , 1.38 , 1.3 , $4/3$, 1.2901



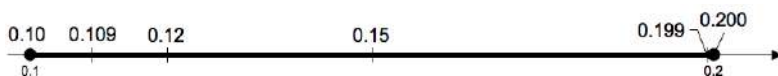
- d) Pertenecen al intervalo $(-1, 1)$ los números: 0.85 , $-\frac{2}{3}$, 0 , -0.01 , 0.757 , -0.9999



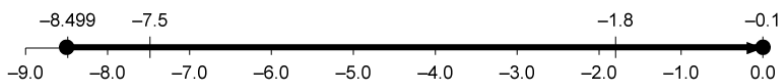
e) Pertenecen al intervalo $[1/2, 3/2]$ los números: 1.3, 0.5, 1.05, 1.44, 1, $\frac{2}{3}$



f) Pertenecen al intervalo $[0.1, 0.2]$ los números: 0.10, 0.199, 0.150, 0.12, 0.109, 0.200



g) Pertenecen al intervalo $(-8.5, 0)$ los números: -1.8, -7.5, -0.1, -8.499



EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 2: OPERACIONES

Sección 2.1: Operaciones básicas

2.01.

- | | | |
|-------|--------|---------|
| a) 0 | d) -22 | g) -16 |
| b) 0 | e) 111 | h) -56 |
| c) 10 | f) -52 | i) 1320 |

2.02.

- | | | |
|-------|--------|---------|
| a) 0 | g) 13 | m) -38 |
| b) -5 | h) -16 | n) -23 |
| c) 2 | i) -62 | o) 2 |
| d) -1 | j) -12 | p) 0 |
| e) 4 | k) 36 | q) 200 |
| f) 2 | l) 6 | r) 1302 |

2.03.

- | | | |
|--------|---------|--------------|
| a) -15 | d) 990 | g) 0 |
| b) 6 | e) 1 | h) 26 |
| c) -3 | f) -560 | i) -5.333... |

2.04.

- | | | |
|---------|--------|-----------|
| a) 896 | d) 3 | g) -0.5 |
| b) -120 | e) -77 | h) -13200 |
| c) 3 | f) 160 | i) -480 |

2.05.

- | | | |
|---------|---------------|---------------|
| a) 81 | d) 4,096 | g) 850 |
| b) -192 | e) 0.00024414 | h) 0.00000635 |
| c) 125 | f) 2,269 | |

2.06.

- | | | |
|---------------|-----------|-----------|
| a) 25 | e) 65,536 | i) 0.0001 |
| b) 0.02777... | f) 72 | j) 46,656 |
| c) 800 | g) 18 | |
| d) 15 | h) 41,503 | |

2.07.

- a) $1.025 = 1.0250$ y $1.25 = 1.250 = 10 \times 0.125$
- b) No hay números iguales en este inciso
- c) $\frac{1}{4} = 0.25$ y $1.250 = 12.5/10$
- d) $650.308 = (-1)(-650.3080)$ y $6500.308/10 = 650.03080$
- e) $-70.030 = -7.003 \times 10 = 700300 \times 10^{-4}$,
- f) $-0.00980 = 9.8 \times (-10)^{-3} = -0.0098$; $-980 \times (-10)^{-5} = 0.98 \times 10^{-2}$
y $-9.8 = -9800/1000$

2.08.

- a) $-0.802 = -0.8020$ y $-(-0.0802) = 0.0802$
- b) $650.308 = -(-650.3080)$ y $6500.308/10 = 650.03080$
- c) $2.035 = 2.0350 = (-1)(-2.03500)$ y $2.35 = 2.350 = 10 \times 0.235$
- d) $-0.802 = -0.8020$ y $0.0802 = 802 \times 10^{-4}$
- e) No hay números iguales en este inciso
- f) $18.05 = 18.0500 = 1805/100$ y $180.5 = 180.50$
- g) $3450.103 = 3450.1030 = 3450103 \times 10^{-3}$
- h) $-7.45 = -745/10^2 = 74.50/(-10)$
- i) $-8045.67 = (-10)804.567 = -8045.670$ y $8.04567 \times 10^{-1} = 0.804567$

2.09.

- a) *Sumas y restas*: el mayor resultado es 234 (ruta ABHIFCDEKJL) y el menor es -19 (ruta ADGEKJIL)
- b) *Multiplikaciones y divisiones*: el mayor resultado es 447,644.371 (ruta ABCDEGFHIIKL) y el menor es 0.00000356 (ruta ABFCDBGKJIHL)

2.10.

- a) *Operaciones con números enteros*: el mayor resultado es 67,712,128.0000 (ruta ACDEKGJIFBHL) y el menor es -22,034,048.0000 (ruta ACDGJIFBHL)

- b) *Operaciones con números decimales*: el mayor resultado es 7699.38462 (ruta ADGKJL) y el menor es -11,545.3846 (ruta ACEKGJL)

2.11.

- a) No, porque por ejemplo 4.01312 tiene más cifras decimales que 4.1 pero es más pequeño que él. La cantidad de cifras decimales de un número no tiene nada que ver con su magnitud.
- b) No, porque por ejemplo si al número 3 le sumamos -3 nos da $3+(-3)=0$ que es un número más pequeño. Lo que sí se puede decir es que sumar *un número positivo* a otro siempre lo agranda.
- c) No, porque por ejemplo si al número 3 le restamos -3 nos da $3-(-3)=6$ que es un número más grande. Lo que sí se puede decir es que restar *un número positivo* a otro siempre lo achica.
- d) No, porque por ejemplo si al número 8 lo multiplicamos por 0.5 nos da $8 \times 0.5 = 4$ que es un número más pequeño. Algo que sí se puede decir es que multiplicar un número positivo por otro *número mayor que 1* siempre lo agranda.
- e) No, porque por ejemplo si al número 8 lo dividimos entre 0.5 nos da $8 \div 0.5 = 16$ que es un número más grande. Algo que sí se puede decir es que dividir un número positivo *entre otro número mayor que 1* siempre lo achica.

2.12.

- a) No, porque por ejemplo si al número 10 lo elevamos a la potencia -2 nos da $10^{-2}=0.01$ que es un número más pequeño. Algo que sí se puede decir es que elevar un número *positivo* a una *potencia mayor que 1* siempre lo agranda.
- b) No, porque por ejemplo si al número 0.25 le sacamos raíz cuadrada nos da $\sqrt{0.25}=0.5$ que es un número más grande. Algo que sí se puede decir es que sacarle raíz cuadrada un número *mayor que 1* siempre lo achica.

2.13.

- a) $3942 - 4 \times 175 = 3242$ ladrillos
- b) $(2 \times 57 + 5 \times 24) \div 3 = \78.00
- c) 1.5 horas = 90 minutos; $90 \div 15 = 6$ horas de videojuego
- d) Julio César murió a la edad de 56 años, Claudio a los 64 años y Nerón a los 31 años.

2.14.

- a) $585 \div 18 = 32.5$ metros
- b) $(6823.72 \div 30 \times 20 \times 5) + (8710.05 \div 30 \times 20 \times 2) = \34359.13
- c) $60 - (623.5 \div 14.5) = 17$ litros
- d) El martes bajó 8°C , el miércoles bajó 7°C , el jueves subió 8°C , el viernes subió 4°C , el sábado bajó 1°C y el domingo subió 9°C

2.15.

- a) $75 \div 8 = 9.375$, por lo que necesita 10 cajas
- b) Hay varias soluciones a este problema; lo más importante es tener en cuenta que los paquetes deben tener un número par de calcetines. Una posible manera de resolver el problema es pensar en 318 pares repartidos entre 8 clientes. Como $318 \div 8 = 39.75$, un posible resultado es enviar 40 pares a 6 clientes y 39 pares a los otros 2
- c) $1400 \div 89.90 = 15.57$, por lo que puedo comprar 15 sillas
- d) $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} = 2\frac{3}{4}$, por lo que debe comprar 3 litros de leche

2.16.

- a) $(35 \times 2.5 \times 2 \times 4 \div 10) \div 19 = 3.68$, por lo que hay que comprar 4 cubetas
- b) $21 \div 6 = 3.5$, por lo que hay que hacer 4 eliminatorias
- c) $276 \div 8 = 34.5$. Puede hacer 34 paquetes y le sobran 4 camisetas
- d) $34 \div (15 \times 20) = 0.1133\dots$ metros, por lo que la distancia entre las plantitas debe ser de 11 cm aproximadamente
- e) $(219 \times 4) \div 50 = 17.52$, por lo que debe comprar 18 paquetes

- f) $137 \div 4 = 34.25$, por lo que aproximadamente se podrán hacer 34 vasos de jugo

Sección 2.2: Operaciones con tres números especiales: 0, 1, 10

2.17.

- | | | |
|-------------|---------------|-------------|
| a) 532.43 | d) 0.000326 | g) 0.000487 |
| b) 6325800 | e) 6.34025701 | h) 63148 |
| c) 0.006708 | f) 0.015632 | i) 57.01 |

2.18.

- | | | |
|-----------|--------------|---------------|
| a) 1 | e) 0.000014 | i) 0.01687 |
| b) 0.0156 | f) 563471200 | j) 0.0000021 |
| c) 0.0033 | g) 0 | k) 1234567.89 |
| d) 0.521 | h) 0.6041 | l) 820.02 |

2.19.

	Operación	Notación convencional	Notación científica
a)	$123456789 + 987654321$	1111111110	1.11111111×10^9
b)	$0.3008 - 0.3$	0.0008	8×10^{-4}
c)	6975×18600	129735000	1.29735×10^8
d)	0.007×0.007	0.000049	4.9×10^{-5}
e)	14400×2197000	31636800000	3.16368×10^{10}
f)	$14400 \div 2197000$	0.006554392353	$6.554392353 \times 10^{-3}$
g)	$4 \div 598$	0.006688963211	$6.688963211 \times 10^{-3}$
h)	$45 \div 0.0000002$	225000000	2.25×10^8
i)	$\sqrt{0.00001}$	0.00316227766	$3.16227766 \times 10^{-3}$
j)	0.00001^2	0.0000000001	1×10^{-10}

2.20.

	Operación	Notación convencional	Notación científica
a)	$0.056 + (-0.00043)$	0.05557	5.557×10^{-2}
b)	13485628×5314298	71666645910000	$7.166664591 \times 10^{13}$
c)	532771×728667297	388212804500000	$3.882128045 \times 10^{14}$
d)	397×1954	775738	7.75738×10^5
e)	45×32	1440	1.440×10^3
f)	$0.3 \div 1289$	0.000232738557	$2.32738557 \times 10^{-4}$
g)	$0.08 \div 0.00085$	94.11764706	9.411764706×10
h)	$18 \div 198$	0.09090909	9.090909×10^{-2}
i)	$0.4908 - 0.4855$	0.0053	5.3×10^{-3}
j)	$.001 - .005$	-0.004	-4×10^{-3}
k)	$\sqrt{0.000004}$	0.002	2×10^{-3}
l)	0.000004^2	0.000000000016	1.6×10^{-11}
m)	125000×208400	26050000000	2.605×10^{10}
n)	$-640000 \div .00002$	-32000000000	-3.2×10^{10}
o)	1×350	0.002857142857	$2.857142857 \times 10^{-3}$
p)	0.03×0.0058	0.000174	1.74×10^{-4}
q)	$235 \div 100000$	0.00235	2.35×10^{-3}
r)	$-123 \div 456789$	-0.0002692709325	$-2.692709325 \times 10^{-4}$
s)	$-999999 - 888888$	-1888887	-1.888887×10^6
t)	$2.2 \div 999.999$	0.0022000022	2.2000022×10^{-3}
u)	99999×11111	1111088889	1.111088889×10^9

Sección 2.3: Redondeo

2.21.

a)	i) 1.2	ii) -2.0	iii) 3.1
b)	i) -1.15	ii) 14.91	iii) 3.14
c)	i) 1.360	ii) -100.243	iii) 3.142
d)	i) 1.1548	ii) -0.0898	iii) 3.1416

2.22.

a)	i) 12.098	iv) 476.876	vii) -234.675
	ii) -5.455	v) 0.286	viii) 4.568
	iii) -0.600	vi) 88.889	ix) 0.025
b)	i) 18.1	iv) 7.8	vii) 307.7
	ii) -100.2	v) 25.3	viii) 1.0
	iii) 12.1	vi) -6.8	ix) 0.0
c)	i) 12.0986	iv) 9.8765	vii) 0.0038
	ii) -5.4545	v) 1.0908	viii) 19.2838
	iii) .0400	vi) 14.0000	ix) 0.0250
d)	i) -100.24	iv) 7.78	vii) 7.54
	ii) 12.10	v) 25.26	viii) 0.33
	iii) -1.33	vi) -6.79	ix) 0.03

2.23.

- | | |
|-----------|----------|
| a) 0.443 | d) 2.236 |
| b) 0.068 | e) 5.760 |
| c) 12.751 | f) 0.079 |

2.24.

- | | | |
|-------------|------------|------------|
| a) 0.407 | h) -0.036 | o) 0.887 |
| b) -188.482 | i) 0.030 | p) 146.662 |
| c) 0.512 | j) 20.000 | q) 0.132 |
| d) 0.928 | k) 18.574 | r) 0.143 |
| e) 0.001 | l) 286.016 | s) 0.663 |
| f) -312.315 | m) 18.963 | t) 3.209 |
| g) 0.686 | n) 0.154 | u) 0.032 |

2.25.

a)	i) 987654	ii) 236	iii) 10
b)	i) 98765	ii) 7	iii) 1
c)	i) 9877	ii) 540	iii) 1
d)	i) 10	ii) 0	iii) 4

2.26.

a)	i) 0	iii) 54300	v) -457
	ii) 5683	iv) 10	vi) -1
b)	i) 0	iii) 446	v) -46
	ii) 8434	iv) 1	vi) -1
c)	i) 56110	iii) 0	v) -871
	ii) 1	iv) 567800	vi) -1
d)	i) 534423	iii) 1	v) 0
	ii) 51335	iv) 1	vi) -897664

2.27.

- | | |
|------------|--------------|
| a) 3,200 | d) 6,437 |
| b) 58 | e) 115 |
| c) 310,000 | f) 1,700,000 |

2.28.

- | | |
|---------------|------------------|
| a) 89,071,000 | d) 5,600 |
| b) 5,380,000 | e) 1 |
| c) 34,000 | f) 2,301,000,000 |

2.29.

- a) $18,521 \times 200 \times 23.51 = \$87,085,742$. Se puede presupuestar una cantidad de 88 millones de pesos o más para el programa.
- b) Sin contar los nudos y lazadas, cada caja requiere $4 \times (0.85 + 0.30) + 2 \times (0.30 + 0.30) = 5.8$ metros. Calculando aproximadamente 30 cm para nudos y lazadas, cada caja se lleva aproximadamente 6.1 metros, y los 65 metros le alcanzan para 10 cajas.

2.30.

- a) $90 \div 8 = \$11.25$, pero esa cantidad no es práctica. Si Doña Lupe renuncia a algo de la ganancia puede vender las rebanadas a \$11, o bien a \$11.50 o \$12.00, que le dejarían más ganancia.
- b) $27 \times 2 \times 3.14 \times 7.5 = 1271.7$ cm, por lo que es conveniente comprar 13 metros.
- c) La ganancia debe ser de \$6.18 por cada cuaderno, por lo que debe vender cada uno a \$34.

Sección 2.4: Medición

2.31.

- | | | |
|---------------|-------------------------|-------------------------------|
| a) 0.56362 km | f) 5.67 cl | k) 54,600 m ² |
| b) 31.277 m | g) 5.6842 kg | l) 32,400,000 cm ³ |
| c) 32.7 mm | h) 5,200 mg | m) 0.000043 dam ³ |
| d) 5.631 dm | i) 3,240 µg | n) 45 dm ³ |
| e) 5.63 l | j) 0.36 dm ² | o) 56,045,000,000 l |

2.32.

- | | | |
|-----------------|------------------------|---------------------------------|
| a) 63,620 m | i) 0.871 dal | q) 5571 mm ² |
| b) 4.56 cm | j) 0.52 ml | r) 0.0324 cm ³ |
| c) 1.3481 mm | k) 7071.2 mg | s) 4.701 m ³ |
| d) 189.46 km | l) 0.250 kg | t) 5,640,000,000 m ³ |
| e) 55,600 cm | m) 0.1674 cg | u) 261,000 mm ³ |
| f) 2,100,000 mm | n) 3,240 µg | v) 48.31 kl |
| g) 0.547 cl | o) 420 cm ² | w) 3.206 m ³ |
| h) 8.71 l | p) 563,400 ha | x) 888 dl |

2.33.

- | | | |
|----------------------|-------------------|-------------|
| a) km | d) mm | g) segundos |
| b) Horas y/o minutos | e) m ³ | h) litros |
| c) mg | f) °C o °F | |

2.34.

- | | |
|--|------------------------|
| a) kg y/o gramos | j) m ³ |
| b) gramos | k) ha o m ² |
| c) horas | l) m ² |
| d) litros (un barril de petróleo son aproximadamente 159 litros) | m) cm o m |
| e) toneladas | n) m ³ o l |
| f) cm | o) \$ |
| g) cm | p) g |
| h) ml | q) años (11.86 años) |
| i) años luz | |

2.35.

- | | | |
|-------------|-------------------|------------|
| a) 125 g | c) 1234.8 km/hora | e) 10 ml |
| b) 3.875 kg | d) 110,500 l | f) 79.9 kg |

2.36.

- a) 750 ml
- b) Aproximadamente 14.8 km/l
- c) Aproximadamente 9.5 mm (un poco menos de 1 cm)
- d) Aproximadamente 3 gramos (recuerda que en una hoja se imprimen dos páginas del libro)
- e) 3.78 m^2
- f) Para 50 tomas
- g) $168 \text{ cm} = 0.168 \text{ dam}$

2.37.

- a) 8 años y 4 meses
- b) 2 años, 9 meses y 0 días
- c) 3 meses y 10 días
- d) 240 horas
- e) 4 días y 4 horas
- f) 600 minutos
- g) 1 hora y 40 minutos
- h) 600 segundos
- i) 1 minuto y 40 segundos

2.38.

- a) 84 meses
- b) 130 meses
- c) 2 años y 10 meses
- d) 3960 días
- e) 1 año, 6 meses y 10 días
- f) 212 días
- g) 72 horas
- h) 200 horas
- i) 12 días y 12 horas
- j) 610 minutos
- k) 3600 segundos
- l) 305 segundos
- m) 2 minutos y 36 segundos

2.39.

- a) 11.18 horas
- b) 11:07 horas
- c) 25.2 minutos
- d) 27:07 minutos
- e) $8:23:12 \text{ horas} = 8.3867 \text{ horas}$
- f) $8.2312 \text{ horas} = 8:13:52 \text{ horas}$

2.40.

- | | |
|------------------|-------------------|
| a) 8.5 horas | d) 15:09 minutos |
| b) 8:18 horas | e) 10.1694 horas |
| c) 15.25 minutos | f) 10:06:04 horas |

2.41.

- | | |
|------------------|-------------------------|
| a) 92 minutos | d) 130 meses y 13 días |
| b) 2:33:00 horas | e) 12:32 pm |
| c) 2.28 horas | f) 3 horas y 20 minutos |

2.42.

- a) 2.5 años
- b) 4:45 horas
- c) El 14 de julio de 2022, 2.33 siglos
- d) 1 minuto y medio
- e) La máquina B porque se tarda .015 de minuto por botón, mientras que la A tarda .016875 de minuto por botón. Otra forma: la máquina B produce 67 botones por minuto, mientras que la A produce 59 botones por minuto
- f) Domingo (uno de los cuatro años es bisiesto)

2.43. ☺

- a) No tiene sentido repartir la altura de la ciudad entre los habitantes.
- b) No se pueden sumar años, habitantes, metros y grados: la suma no tiene ningún sentido
- c) Aunque $200 \times 20 = 5 \times 800$, la masa requiere de cierta temperatura. En una receta no se pueden cambiar así los tiempos y las temperaturas
- d) Si no se especifican las dioptrías para cada ojo, a cada uno le toca la misma graduación: 2.5 dioptrías
- e) El mismo tiempo: un minuto

EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 3: LETRAS EN EXPRESIONES MATEMÁTICAS

Sección 3.1: Uso de letras en expresiones matemáticas

- a) C es una variable, 2 es una constante, π es una constante (3.1416) y r es una variable (longitud del radio)
- b) A es una variable, π es una constante (3.1416), r es una variable (longitud del radio) y la potencia 2 es una constante
- c) v , d y t son variables
- d) min y hr son a la vez variables y unidades de medida; 60 es una constante
- e) D es una constante ($\approx 9.4608 \times 10^{12} = 9,460,800,000,000$: más de 9 billones de km), c es una constante ($\approx 300,000$), 60, 60, 24 y 365 son constantes
- f) v es variable, g es constante (≈ 9.81) y t es variable
- g) P , T y t son variables
- h) h , c_1 y c_2 son variables; en c_1^2 la potencia 2 es una constante y el subíndice 1 etiqueta a uno de los dos catetos, y en c_2^2 la potencia 2 es una constante y el subíndice 2 etiqueta al otro cateto
- i) a , b y c son constantes, x es una variable y la potencia 2 es una constante

3.02.

- a) V es una variable, 4, 3 y π (3.1416) son constantes, r es variable (radio de la esfera) y la potencia 3 es constante
- b) A es una variable, 4 y π (3.1416) son constantes, r es variable (radio de la esfera) y la potencia 2 es constante
- c) A , P y a son variables y 2 es constante
- d) $^{\circ}\text{C}$ y $^{\circ}\text{F}$ son a la vez variables y unidades de medida, 32 y 1.8 son constantes
- e) P , *masa* y *superficie* son variables, *kg* y *m* son unidades de medida, la potencia 2 es constante
- f) d , m y v son variables
- g) a , v_p , v_i y t son variables; en v_f y v_i los subíndices f e i etiquetan respectivamente a la velocidad final y la velocidad inicial

h) T , F y d son variables

i) F , m y a son variables

Sección 3.2: Subíndices y sumatorias

3.03.

a) 57

d) 1,327

b) 48

e) 3,249

c) 14

3.04.

a) 102.4

d) 1,781.34

b) 49.0

e) 10,485.76

c) 31.3

3.05.

a) 401

e) 160,801

b) 47

f) 2,209

c) 20.02

g) 207.16

d) 42,917

3.06.

a) 61.3

d) 7

b) $1173.42^3=1,615,699,008$

e) 22,364.613

c) $25,733,798^2=662,228,359.5$

f) $36.9^3=50,243.409$

3.07.

a) 7

d) $14^2=196$

g) 268

b) 105

e) $14^2 \times 1^2=196$

h) $268 \times 105=28,140$

c) $14 \times 1=14$

f) 1

i) $14^2 = 196$

3.08.

- | | | |
|------------------------------|------------------------------|-----------|
| a) $0.1^2=0.01$ | d) $0.1 \times (-1.2)=-0.12$ | g) -1.2 |
| b) $1.19 \times 1.32=1.5708$ | e) $0.01 \times 1.44=0.0144$ | h) 1.32 |
| c) 0.14 | f) $(-0.12)^2=0.0144$ | i) 1.19 |

**EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 4:
CÁLCULOS**

Sección 4.1: Jerarquía de las operaciones

4.01.

- | | | |
|--------|-------|------|
| a) 38 | e) 4 | i) 0 |
| b) -6 | f) -6 | j) 1 |
| c) 3 | g) 70 | |
| d) -57 | h) 70 | |

4.02.

- | | | |
|--------|-------|------|
| a) 6 | e) 40 | i) 3 |
| b) 10 | f) 2 | j) 9 |
| c) -10 | g) 9 | |
| d) -1 | h) 9 | |

4.03.

- | | | |
|------------|----------------|----------------|
| a) 8,822 | d) 89.3333.... | g) 0.016614386 |
| b) -56 | e) 7 | h) 10,384.2 |
| c) 100.825 | f) 7 | |

4.04.

- | | | |
|----------------|-----------------|------------------|
| a) 1,988 | h) 144.5714286 | o) 41.12857143 |
| b) 1,650 | i) 1,200 | p) 997.1567398 |
| c) 765 | j) 15.83333333 | q) -15,141.33333 |
| d) -35 | k) -2.384615385 | r) -1,224.757895 |
| e) 1,849,600 | l) 50.66666667 | s) -2,532.344262 |
| f) 129,960,000 | m) 10.05714286 | |
| g) 11.78526679 | n) 6.601360544 | |

4.05.

- | | |
|-------------------------------------|--|
| a) $3 + 4.5 \times 20 - 2 = \91 | c) $(3 + 4.5) \times 20 - 2 = \148 |
| b) $3 + 4.5 \times (20 - 2) = \84 | d) $(3 + 4.5) \times (20 - 2) = \135 |

4.06.

- | | |
|------------------------------------|---------------------------------------|
| a) $(120 - 18) \div 6 + 30 = \47 | c) $(120 - 18) \div (6 + 30) = 2.83m$ |
| b) $120 - 18 \div 6 + 30 = \$147$ | d) $120 - (18 \div 6 + 30) = \87 |

Sección 4.2: Números muy grandes y muy chicos en la calculadora

4.07.

- | | |
|---|---|
| a) $0.000000064 = 6.4 \times 10^{-8}$ | e) $0.025 = 2.5 \times 10^{-2}$ |
| b) $20,200,000,000 = 2.02 \times 10^{10}$ | f) $2,373,046,875 = 2.373046875 \times 10^9$ |
| c) $0.001955 = 1.955 \times 10^{-3}$ | g) $112,279,000,000 = 1.12279 \times 10^{11}$ |
| d) $0.0000000002 = 2 \times 10^{-10}$ | h) $738,000 = 7.38 \times 10^5$ |

4.08.

- | |
|---|
| a) $10,050,062,500 = 1.00500625 \times 10^{10}$ |
| b) $63,572,000,000 = 6.3572 \times 10^{10}$ |
| c) $1,000,000,000,000 = 1 \times 10^{12}$ |

- d) $0.0062152 = 6.2152 \times 10^{-3}$
- e) $0.0007745966692 = 7.745966692 \times 10^{-4}$
- f) $1,001,500,750,000 = 1.00150075 \times 10^{12}$
- g) $0.00217295603 = 2.17295603 \times 10^{-3}$
- h) $15,000,000,000,000,000 = 1.5 \times 10^{16}$
- i) $0.00000000002 = 2 \times 10^{-11}$
- j) $2,357,947,691 = 2.357947691 \times 10^9$
- k) $60 = 6 \times 10$
- l) $1,235,000,000,000 = 1.235 \times 10^{12}$
- m) $0.0016 = 1.6 \times 10^{-3}$
- n) $0.00000625 = 6.25 \times 10^{-6}$
- o) $52,500,000,000 = 5.25 \times 10^{10}$
- p) $6,430,855,450 = 6.43085545 \times 10^9$
- q) $0.0011 = 1.1 \times 10^{-3}$
- r) $0.00000000000125 = 1.25 \times 10^{-13}$
- s) $0.000000000001 = 1 \times 10^{-12}$
- t) $0.000000006407791875 = 6.407791875 \times 10^{-10}$

4.09.

- a) $25,001,000.01 = 2.500100001 \times 10^7$
- b) $2,510.01 = 2.51001 \times 10^3$
- c) $-455,000,000,000 = -4.55 \times 10^{11}$
- d) $-0.004949 = -4.949 \times 10^{-3}$
- e) $-0.830584 = -8.30584 \times 10^{-1}$

4.10.

- a) $-44.44 = -4.444 \times 10$
- b) $30.033003 = 3.0033003 \times 10$
- c) $-0.0000125 = -1.25 \times 10^{-5}$
- d) $126.5543362 = 1.265543362 \times 10^2$
- e) $160,320.16 = 1.6032016 \times 10^5$

Sección 4.3: Cálculo de fórmulas utilizando la calculadora

4.11.

- | | | |
|-------------|------------|-----------|
| a) 10.001 | d) 4.638 | g) 3.735 |
| b) 2.758 | e) 35.760 | h) -3.333 |
| c) -346.087 | f) 374.754 | |

4.12.

- | | |
|---|-----------|
| a) 77.47 | k) 0.01 |
| b) 39.90 | l) 39.29 |
| c) 1.18 | m) 0.78 |
| d) 6.22 | n) 0.63 |
| e) 196.62 | o) -10.47 |
| f) 10.89 | p) -44.99 |
| g) 0.15 | q) 579.96 |
| h) 5.05 | r) 58.23 |
| i) -1893.69 | |
| j) 0.00 (en la calculadora aparece
como $1.27600567 \times 10^{-04}$) | |

4.13.

- | | | |
|------------|------------|------------|
| a) 13.6744 | c) 29.9546 | e) -1.0000 |
| b) -2.9661 | d) 47.0388 | |

4.14.

- | | | |
|--------|--------|-------------|
| a) 1.0 | d) 0.1 | g) 12,024.9 |
| b) 3.0 | e) 0.3 | h) 0.1 |
| c) 1.1 | f) 75 | |

4.15.

a) $(468.21 + 0.014 \times 6071)^{(-2-1+3)} = 1$

b) $\frac{\left[50 \times 0.0014 + \frac{50}{\{0.032 - (-2)\}}\right]}{[111 \times (-6.201) \times (-44.083)]} = 0.001$

c) $\sqrt{\left(1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{111}}}\right)} = 1.839$

d) $\sqrt{\left[\frac{\{(3.1416 - (-44.083) \times (6071 + 32.79)\}}{0.0014 + 0.032}\right]} \times \sqrt{[111 - 4.13 \times (-44.083)]} = 48,589.788$

e) $\left(\frac{\left\{3 + \sqrt{2 \times 0.0014 + 1/6071}\right\}}{3.1416} - \frac{[-6.201]}{[32.79 \times 111]}\right)^{(3-2)} = 0.974$

4.16.

a) 253,467.97

c) -8.39

e) 1.17

b) -3.88

d) 112,423.24

**EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 5:
PROPORCIONALIDAD Y PORCENTAJES**

Sección 5.1: Proporcionalidad directa e inversa

5.01.

- a) Las variables son velocidad y tiempo; se tiene una variación inversamente proporcional, cuya constante de proporcionalidad es 600 centímetros.
- b) En ambos casos las variables son cantidad de gasolina y kilómetros recorridos. En la primera serie de pruebas la variación es directamente proporcional; la constante de proporcionalidad es de 15 km recorridos con cada litro de gasolina, o bien de 0.067 litros por cada kilómetro. En la segunda serie de pruebas, no hay proporcionalidad. La diferencia se puede deber a que, en la primera, otras condiciones que pueden afectar el consumo de gasolina están controladas (tráfico, calidad del aire,

cantidad de frenadas y arranques, peso transportado, etc.), mientras que en la segunda estas condiciones varían mucho en el uso normal.

- c) Las variables son cantidad de trabajadores y cantidad de días. No hay entre ellas relación de proporcionalidad.
- d) Las variables son largo y ancho; se tiene una variación directamente proporcional. La constante es 1.6 centímetros de largo por cada centímetro de ancho, o bien 0.6 centímetros de ancho por cada centímetro de largo.
- e) Las variables son la altitud (ya sea en pies o en metros), la temperatura (ya sea en grados Fahrenheit o centígrados), y los ingredientes de las recetas mencionados en la tabla. Aunque sí hay proporcionalidad directa entre la altitud medida en pies y la medida en metros (cuyas constantes son 3.28 pies por cada metro o bien 0.30 metros por cada pie), la altitud no tiene relación de proporcionalidad con ninguna de las otras variables. Tampoco hay proporcionalidad de las otras variables entre sí.

5.02.

- a) Las variables son la cantidad de pares y el importe cobrado; hay una relación de proporcionalidad directa entre ellas. La constante de proporcionalidad es \$45 el par de calcetas (la otra sería 0.02 de par de calceta por cada peso, pero eso no tiene sentido).
- b) Para cada prenda, las variables son la cantidad de prendas y el precio. Salvo en el caso de las sudaderas, no hay proporcionalidad entre las variables. En el caso de las sudaderas hay proporcionalidad directa; la constante de proporcionalidad es \$240 por cada sudadera (la otra constante sería .004 de sudadera por cada peso, pero no tiene sentido).
- c) Las variables son el tiempo y la cantidad de células; no hay proporcionalidad entre ellas.
- d) Las variables son el tiempo de resolución y la calificación; no hay proporcionalidad entre ellas.
- e) Las variables son la cantidad de personas y el pago individual. Hay entre ellas una proporcionalidad inversa; la constante es 4,200 pesos $\times$ persona.

- f) Las variables son peso y talla; no hay proporcionalidad entre ellas.
- g) Las variables son largo y ancho. Hay entre ellas una proporcionalidad inversa; la constante es, justamente, el área: 3600 cm^2 .

5.03.

- a) Hay proporcionalidad directa; los valores unitarios son 2.5 años por cada centímetro o bien 0.4 centímetros (es decir 4 milímetros) por cada año.
- b) No hay proporcionalidad directa.
- c) Hay proporcionalidad directa; los valores unitarios son un peso por minuto o bien un minuto por peso.
- d) Hay proporcionalidad. Los valores unitarios son $\frac{1}{2}$ kilómetro por día (en promedio), o dos días por kilómetro.
- e) No hay proporcionalidad, debido al “banderazo” y a las cuotas distintas por kilómetro o por tiempo de no circulación.

5.04.

- a) Hay proporcionalidad. Los valores unitarios son una guayaba verde por cada 4 guayabas, o bien $\frac{1}{4}$ de guayaba por cada guayaba verde.
- b) Esto es francamente desproporcionado. ☺
- c) Hay proporcionalidad. El valor unitario es un político honesto por tres deshonestos (el otro valor unitario sería $\frac{1}{3}$ de político deshonesto por cada honesto, pero no tiene sentido)
- d) No hay proporcionalidad.
- e) Hay proporcionalidad. Los valores unitarios son 80 kilómetros por cada hora, o bien 0.0125 de hora por cada kilómetro (0.0125 de hora son 45 segundos).
- f) Hay proporcionalidad. Los valores unitarios son \$8.75 por cada kilo o bien 0.114 de kilo (es decir, 114 gramos) por cada peso.
- g) No hay proporcionalidad. El “banderazo” está afectando el precio pagado por kilómetro.

5.05.

- a) En la Ciudad de México, la densidad es de 5,956 habitantes por kilómetro cuadrado.
- b) En BCS, la densidad es de 8.6 kilómetros cuadrados por habitante (en la misma superficie en que en BCS vive en promedio un habitante, en la Ciudad de México viven más de 50,000 habitantes).

5.06.

d : distancia en cm	0.8	1	4	4	6	5.6	8	7.2	10
t : tiempo promedio en seg	1	1.25	5	5	7.5	7	10	9	12.5

5.07.

a)	X	2	3	5	7	8	9	10
	Y	4.8	7.2	12	16.8	19.2	21.6	24.0

b)	X	1	5	10	20	6	16	220
	Y	14.50	72.5	145	290	87	232	3190

c)	X	3	0	6	9	30	12	9
	Y	5	0	10	15	50	20	15

5.08. Los siguientes resultados están redondeados a tres cifras decimales cuando es necesario.

a)	X	5.1	10.2	0	1	2.125	2	4.25
	Y	2.4	4.8	0	0.471	1	0.941	2

b)	X	363	11	11	1	2	0.579	1.158
	Y	627	19	19	1.727	3.455	1	2

c)	X	65	2	0.455	7	1001	4.221	0.130
	Y	1001	30.8	7	108	15415.4	65	2

d)

X	0.105	1	0.75	0	0	0.14	0.079
Y	0.14	1.333	1	0	0	0.187	0.105

5.09.

X: Contenido	100 g	200 g	250 g	300 g	500 g	750 g	1000 g	2000 g
Y: Cantidad	100	50	40	33.33	20	13.33	10	5

Observa que el valor obtenido en la cuarta columna (33.33), es un resultado que aunque sea matemáticamente correcto, no tiene sentido en el contexto planteado. Esto puede ocurrir en distintas circunstancias, por lo que es importante revisar los resultados en el contexto en el que se esté trabajando. ¿Cuál otro resultado no tiene sentido?

5.10.

a)

X: tiempo en horas	2.18 = 2 horas con 11 minutos	3	4	3.43 = 3 horas con 26 minutos	2.5
Y: velocidad promedio (km/hr)	110	80	60	70	96

b) A 240 minutos

Sección 5.2: Problemas con proporciones

5.11.

- a) 0.113 litros por cada m^2 ; \$8000
- b) 37.5 segundos
- c) 2.8 litros

5.12.

- a) 7.5 litros
- b) La comisión es de \$1,200 por cada refrigerador, en mayo cobró \$14,400
- c) La Calzada de los Muertos mide algo más de 2 km, la Pirámide del Sol mide 220 m de lado en su base, y es ligeramente mayor que el Zócalo de CDMX, porque tiene una superficie de 48,400 m²

5.13.

- a) Quedaron igual (2 de azul por cada 3 de amarillo)
- b) Las de alta definición son más anchas; una manera de llegar a este resultado es viendo que en las normales por cada centímetro de alto hay 1.33 cm de ancho, mientras que en las de alta definición por cada centímetro de alto hay 1.78 cm de ancho
- c) En Historia porque obtuvo 7.6

5.14.

- a) “La Cachucha” porque en “El Chapulín” salen a \$360 el ciento
- b) Las dos caminan a 0.8 cuerdas por minuto, o a 1¼ minuto por cuerda
- c) 80 adultos; 500 niños y 400 adultos; a la primera función entraron proporcionalmente más niños

5.15.

- a) Carmen \$118,966, Mireya \$268,966 y Rosalinda \$201,069
- b) 7½ bolas de verde, 4.89 bolas de azul y 9.78 bolas de lila

5.16.

- a) 20 a Luis, 100 a Pedro, 60 a Josefa y 40 a Yessica
- b) Redondeando al gramo, 547.327 kg de hierro, 634 g de carbono, 15.842 kg de manganeso, 317 g de fósforo, 238 g de azufre, 5.941 g de silicio, 150.495 kg de cromo y 79.208 kg de níquel (eso da 800.002 kg por los redondeos)

- c) 2,500 cuentas de plata, 1,500 cuentas de vidrio, 2,000 cuentas de cuarzo y 1,000 cuentas de jade.

Sección 5.3: Porcentajes

NOTA: Las respuestas a los ejercicios 5.19 a 5.34 están redondeadas a una cantidad arbitraria de cifras decimales, porque no tienen contexto que determine la cantidad apropiada.

5.17.

- | | |
|----------|----------|
| a) 0.89% | c) 33.3% |
| b) 203% | d) 2% |

5.18.

- | | | |
|-----------|-----------|----------|
| a) 18.5% | e) 375% | i) 4.76% |
| b) 16.67% | f) 38.89% | j) 10% |
| c) 8% | g) 23.6% | |
| d) 0.11% | h) 263.3% | |

5.19.

- | | |
|---------|---------|
| a) 28.2 | c) 4.77 |
| b) 8.9 | d) 0.53 |

5.20.

- | | | |
|---------|---------|-----------|
| a) 1357 | d) 14.6 | g) 8.7 |
| b) 1.24 | e) 1.12 | h) 80,808 |
| c) 2 | f) 2.8 | |

5.21.

- | | | |
|------------|---------|-------|
| a) 0.129 | d) 100 | g) 20 |
| b) 4,856 | e) 1.61 | h) 2 |
| c) 120,588 | f) 7.17 | |

5.22.

- | | | |
|----------|----------|----------|
| a) 347.2 | e) 3,231 | i) 0.91 |
| b) 776 | f) 0.1 | j) 3,739 |
| c) 406 | g) 1.81 | |
| d) 100 | h) 60.8 | |

5.23.

- | | |
|------------------|------------------|
| a) $x=6,726$ | d) $x\%=1,200\%$ |
| b) $x\%=0.63\%$ | e) $x=2,520$ |
| c) $x=1,300,278$ | f) $x=1,088$ |

5.24.

- | | |
|----------------|-----------------|
| a) $x=780.34$ | g) $x=0.000169$ |
| b) $x\%=302\%$ | h) $x\%=9.09\%$ |
| c) $x=97,857$ | i) $x=0.058$ |
| d) $x\%=5\%$ | j) $x\%=0.5\%$ |
| e) $x=114.7$ | k) $x=1$ |
| f) $x=12,760$ | l) $x=350$ |

5.25.

- | | |
|-----------|-----------|
| a) 135.34 | c) 1.5706 |
| b) 6.96 | d) 0 |

5.26.

- | | |
|----------|-----------|
| a) 6,731 | d) 17,960 |
| b) 9 | e) 68.11 |
| c) 7.77 | f) 0.0792 |

5.27.

- | | |
|-----------|-----------|
| a) 1.71 | c) 1,391 |
| b) 11,748 | d) 47,163 |

5.28.

- | | |
|-----------|-----------|
| a) 11 | d) 0.17 |
| b) 62,992 | e) 224.82 |
| c) 56.24 | f) 225 |

5.29.

- | | |
|-----------------|-------------------------------|
| g) $87+13=100$ | i) $22.5+23.5=46$ |
| h) $118-18=100$ | j) $9.0011 - 0.0855 = 8.9156$ |

5.30.

- a) $1.556 + 0.044 = 1.6$
- b) $100,000,000 - 99,000,000 = 1,000,000$
- c) $0.299 + 0.442 = 0.741$
- d) $18,969 + 37,938 = 56,907$
- e) $7 - 14 = -7$. Observa que siempre que a un número se le reste más de su 100% el resultado necesariamente es negativo
- f) $22 - 4 = 18$

5.31.

- a) $x = 40.63$
- b) $x\% = 31\%$
- c) $x = 1,927.866$
- d) $x = 81,633$
- e) $x\% = 178.6\%$
- f) $x = 0.168$
- g) $x = 1,853,280$
- h) $x\% = 44.6\%$
- i) $x = 2.01$
- j) $x\% = 14\%$

5.32.

- a) $x = 1581$
- b) $x\% = 37.8\%$
- c) $x\% = 158.6\%$
- d) $x = 1.0296$
- e) $x = 63.336$
- f) $x\% = 312.5\%$
- g) $x = 0.903$
- h) $x\% = 99.9\%$
- i) $x = 0.0997$
- j) $x = 0.143$

5.33.

a)

PRENDA	pantalón	camiseta	vestido	blusa	falda	blusa	falda
PRECIO MARCADO	\$300	\$50	\$500	\$200	\$275	\$180	\$400
DESCUENTO	\$75	\$12.50	\$125	\$50	\$68.75	\$45	\$100
MONTO A PAGAR	\$225	\$37.50	\$375	\$150	\$206.25	\$135	\$300

- b) 478 alumnos
- c) 65% de mujeres
- d) 27 vacas
- e) \$51.30
- f) 686 mm
- g) La estufa subió 12.76% y el refrigerador 13.56%
- h) \$2,168
- i) \$1,723.90 en 2010; en la zona C el salario es 5.2% menor que en el D.F.
- j) 139% de la población normal
- k) \$1,250.48
- l) 2,627 árboles
- m) Sí son compatibles; los nuevos pesan 2.567 kg

5.34.

- | | |
|-----------------|--------------------------|
| a) 7.8% | j) \$3,058.60 y \$489.40 |
| b) 8.6% | k) 141 personas |
| c) \$310 | l) 1,739 árboles |
| d) 5.9% | m) \$1,582.24 |
| e) 267.24 km | n) 60 kg |
| f) 2665 alumnos | o) 60% |
| g) \$211.50 | p) \$297.93 |
| h) \$1,168.75 | q) \$3,380 y \$845 |
| i) 4.8% | |

5.35.

- | | |
|-----------------------------------|--|
| a) 5,287 alumnos | f) En primaria hay 160 hombres y 175 mujeres, en secundaria hay 124 hombres y 90 mujeres; en total en la escuela son 51.7% de hombres y 58.3% de mujeres |
| b) Matriz: 15.4%; Sucursal: 28.6% | |
| c) Pierde \$221.75 que es 4.2% | |
| d) 70.3% | |
| e) 9.13% | |

5.36.

- | | |
|---|---|
| a) \$236.64 | e) Pierde \$761.90 |
| b) 57.5% | f) 47.6%, \$17,121.60 |
| c) 8.5 | g) 28% de rojo, 42% de blanco y 30% de azul |
| d) La blanca lleva 24% más palmas y la azul lleva 16% menos | h) 12.9% |

5.37.

- | | |
|---------------|----------------|
| a) \$30.25 | e) 4.9% |
| b) \$2,214.55 | f) 9.9% |
| c) 8.1% | g) \$11,956.75 |
| d) \$371.85 | |

5.38.

- | | |
|---|---------------------------------|
| a) 1,071,250 kg | d) 42.6% |
| b) En 2012 vendieron 35,714 cajas
y en 2011 vendieron 41,673 | e) 6,118,881 kg
f) 71,560 kg |
| c) 848 kg en 2012 y 989 kg en 2011 | g) 16.7% |

5.39.

- | | |
|----------|----------|
| a) 17.3% | c) 66% |
| b) 27.5% | d) 21.3% |

5.40.

- | | |
|----------|----------|
| a) 52.6% | d) 50% |
| b) 13.8% | e) 17.2% |
| c) 75.2% | f) 33.5% |

5.41.

- | | |
|--------|----------|
| a) 10% | c) 111% |
| b) 90% | d) 11.1% |

5.42.

- | | |
|----------|-----------|
| a) 20% | d) 115.2% |
| b) 15.2% | e) 83.3% |
| c) 38.3% | f) 138.3% |

5.43.

- a) Sí tiene sentido; por ejemplo, se entrevistó a 120 personas y 16 dijeron estar a favor del partido P**.
- b) No tiene sentido porque, si se considera siempre con respecto al contenido en 2003, para 2007 este volumen habría disminuido en 120%, y eso es imposible. Si la presa disminuye con respecto al volumen del

año anterior, sí se podría decir que en 2004 queda el 60% y de ese 60% se pierde en 2005 el 30%, por lo que queda 42% del contenido de 2003, y de ese 42% se pierde en 2006 el 40%, por lo que queda 25.2% del contenido de 2003, y de ese 25.2% se pierde en 2007 el 10%, por lo que en 2007 queda el 22.68% del contenido inicial de 2003.

- c) Para el azúcar sí tiene sentido; por ejemplo, si el kilogramo de azúcar costaba \$25 entonces aumentó a \$55. Pero para las computadoras no tiene sentido ya que eso significaría que además de llevarnos la computadora, nos darían dinero.
- d) Sí tiene sentido; por ejemplo, a la larga, de cada 1,000 personas, 8 tienen esa deformación congénita.
- e) No tiene sentido porque 0.5% es menos de 1% y no es posible que hayan nacido tan pocas mujeres.

5.44.

- a) Para el aumento de la red caminera sí tiene sentido; si por ejemplo, la red de caminos tenía 10 km entonces aumentó a 23.4 km, es decir, hubo un aumento de 13.4 km. Para las reparaciones no tiene sentido porque no es posible reparar más camino del que hay.
- b) Sí tiene sentido; por ejemplo, si en ese país hubiera 1,000,000 de personas y la riqueza nacional fuera de 200,000,000 dineros, entonces 50,000 personas poseerían 180,000,000 dineros.
- c) Este razonamiento no es correcto porque al volver a pintar solo dos carriles, estos regresaron a su anchura original, por lo que no se puede hacer la comparación porcentualmente.
- d) Sí tiene sentido; si por ejemplo la rebanada de pan blanco tiene 4 gramos de fibra, la de pan integral tiene 4.8. Sin embargo, el mismo porcentaje aplica a todo el paquete: 100 gramos de fibra en el paquete de 25 rebanadas de pan blanco y 120 gramos en el de pan integral.
- e) Sí tiene sentido; por ejemplo, si el año pasado había 100 campesinos y 28 se fueron de la región, ahora quedan 72 campesinos.

ÍNDICE TEMÁTICO

Para acceder a cada tema, dale clic a la página correspondiente

Índice de símbolos. Ver también la entrada "símbolos"	
$+$ 93, 102, 109. Ver suma	$:$ 96, 176, 203, 286. Ver división;
$-$ 93, 94, 102, 109, 203. Ver resta;	Ver medición del tiempo;
Ver números negativos	Ver razón
$\pm$ 204	$\therefore$ 205
$\times$ 95, 104, 110, 203. Ver multiplicación	$::$ 286. Ver razón
$\div$ 96, 110, 203, 242. Ver división	$'$ 205
$\sqrt{}$ 12, 99, 111, 113, 231. Ver raíz cuadrada	$''$ 173, 205
$\frac{}{}$ (raya de fracción) 40, 96, 203, 230, 242, 243. Ver fracciones; Ver división	$*$ 95, 203, 205
$\cdot$ (punto decimal) 18, 52. Ver decimales	$-$ (barra arriba de una letra) 205
$\cdot$ (punto para denotar la multiplicación) 95, 203	$/$ 41, 96, 203, 242. Ver fracciones;
	Ver división
	$!$ 204, 205
	$=$ 23, 24, 80, 150, 189, 204
	$\neq$ 24, 25, 80, 204. Ver desigualdades
	$\equiv$ 205
	$\sim$ 204, 205
	$\approx$ 147, 150, 204
	$\cong$ 204
	$\supset$ 205

204	$\mathbb{R}$ 76, 112, 201
... 35-36, 204	$\Sigma, \sigma, \varsigma$ (sigma) 199, 214, 215, 216, 217. Ver sumatoria
(...) 203, 204, 206, 243. Ver paréntesis	Ξ, ξ (ksi) 199
[...] 84, 203, 204, 246. Ver corchetes	T, τ (tau) 199
{...} 203, 204, 246, 249. Ver llaves	$\vec{V}$ 205
⟨...⟩ 203. Ver paréntesis angulares	X, χ (ji, chi) 199
^ 97, 203, 205	Y, y (ýpsilon) 199
^ 205	Z 76, 112, 201
v 205	Z, ζ (dzeta) 199
< 23, 24, 80, 81, 82, 84, 204. Ver desigualdades	Γ, γ (gamma) 199
≤ 24, 80, 81, 82, 204. Ver desigualdades	$\Theta, \theta, \vartheta$ (theta) 199
> 23, 24, 80, 81, 82, 204. Ver desigualdades	Λ, λ (lambda) 199
≥ 24, 80, 81, 82, 204. Ver desigualdades	Φ, ϕ, φ (phi) 199
A, α (alfa) 199, 203, 204	Ψ, ψ (psi) 199
B, β (beta) 199	Ω, ω (omega) 199
C 76, 112, 201	% 307. Ver porcentajes
Δ, δ (delta) 199, 205	‰ 311
∂ 205	‰ 311
E, ε (épsilon) 199, 204	∞ 86, 87, 199, 203, 204
H, η (eta) 199	$\propto$ 199, 204
I, ι (iota) 199	$\cap$ 204
K, κ (kappa) 199	$\cup$ 204
M, μ (mu) 199	$\subset$ 204
N 76, 112, 201	$\in$ 83, 204
N, ν (nu) 199	$\notin$ 83, 204
O, $\omicron$ (ómicron) 199	€ 204
Π, π (pi) 198, 199	$\emptyset$ 204
P, ρ (rho) 199	$\forall$ 205
Q 76, 112, 201	$\exists$ 205
	$\nexists$ 205
	$\Rightarrow$ 205
	$\Leftrightarrow$ 205
	$\cdot \ni$ 204
	$\int$ 205
	$\angle$ 205

⊥ 205
 || 205
 Δ 199, 205
 ∇ 205

Índice de teclas de calculadora. Ver también la entrada "teclas"

 11
 11
 11
 11
 30, 59, 93, 230
 30
 310
 y  11, 243
 97, 265
 11, 97, 182, 226, 243
 12, 80, 243
 265
 265
 265
 2nd 12
 137, 141, 265
 36
 14, 259
 265
 14, 259
 14, 259
 265
 Fn 12
 263
 11, 64, 96, 137, 143, 237, 259, 260
 264

 12
 264
 265
 12, 97, 242, 265
 97, 265
 97, 265
 265

Índice temático

0 operaciones con 135
 1 operaciones con 136

A

absoluto, valor 35
 de la diferencia 120
 ac, abreviación de acre 172
 alfabeto griego 199
 algoritmo 93, 101, 108
 ángulo 201, 205
 año 175
 año luz 173
 aproximación. Ver redondeo
 aproximadamente 147, 148
 asociativa, propiedad 114
 asterisco
 para denotar multiplicación 203

B

barra 205
 billón 22, 235
 confusión entre inglés y español 22
 biprima 205

bit 174

braza 173

bu, abreviación de bushel 172

byte 174, 175

C

C 60, 112, 201

c (constante) 197, 198

calculadora 7, 9, 10, 15, 235, 238,
241, 266. Ver también
teclas
corrección de errores 258
forma de expresión de los núme-
ros 237
letreros en la pantalla 11, 263,
266
memoria 263
modo aritmético 11
modo COMP 11
modo de regresión lineal 11
modo estadístico 11
para calcular porcentajes 310
teclas. Ver teclas
uso para ordenar números 23,
32, 50, 64

centena 19

centésimo 54

centi- 166

cero 21, 135

elevado a la potencia cero 99,
116, 118, 135
en los números decimales 55, 58
operaciones con 115, 116, 135

cien

tantos por 308

científica, notación 142

cifra decimal 52

cociente 96

el porcentaje como - 309

la fracción como - 46

comparación de razones 294, 299

complejos, números 76

congruentes 205

conjunto vacío 204

conmutativa, propiedad 114

constante 197

c 198

de proporcionalidad 273, 279,
283, 309

e 198

g 198

π 198

conversión

de fracciones a números decima-
les 58

de unidades de tiempo 176, 180

corchetes 203

para denotar intervalos cerrados
84

para marcar el orden en que se
hacen las operaciones 246

cu yd, abreviación de yarda cúbica
172

cuarta proporcional 294, 295

D

deca- 166

decena 19

deci- 166

decimal 52

cifras 52

dígitos 52

expresión de números reales 74

orden 59

decimal, fracción 52

equivalencia 49
 significado 52
 decimal, número 52, 76
 ceros en los - 55, 58
 conversión de fracciones a 58
 periodos 59
 periodos de 9 59, 60, 77, 153
 porcentajes como 309
 punto 18, 52
 repetición de ciclos o periodos 59
 significado 52
 décimo 54
 denominador 40
 derivada 205
 desigualdad 24, 26, 63, 79, 86, 87, 204
 $a < x < b$ 26
 día 175
 diferencia 94
 valor absoluto de la 120
 dígito 11, 52, 57
 dinero, unidad de medida 194
 distinto 24
 distributiva, propiedad 115
 división 96, 104, 110, 203
 casita de la - 96, 203
 cero entre cualquier número 115, 135
 de enteros 113
 de naturales 113
 de racionales 113
 de reales 113
 entre cero 97, 105, 113, 115, 116, 135
 entre potencias de diez 138, 140
 significado matemático de la- 101
 uso de la 121

uso de la calculadora- 96

E

e (constante) 198
 efecto espejo 34, 62, 66, 77
 enteros, números 30, 76
 división de - 113
 multiplicación de - 113
 potenciación de - 113
 radicación de - 113
 resta de - 113
 suma de - 113
 equivalencia
 de fracciones 43, 44, 46, 56
 de razones 286
 lógica 205
 error de medición 162
 espejo 34, 62, 66, 77
 estimación 126, 254
 Excel 95, 97
 existe 205
 exponente 97, 98, 99, 232
 cero 99, 117, 135
 con operaciones 232
 el 0 como - 99, 116, 135
 el 1 como - 116, 136
 negativo 98

F

factor 95
 fl oz, abreviación de onza 172
 fraccionamiento de la unidad 39, 40, 52
 fracción 40
 como cociente 46
 como número 46
 como operador 47
 como razón 48

de una cantidad 48
 decimal 52, 58, 59
 decimal, conversión a 58
 equivalente 43, 46, 49, 56
 impropia 42
 lectura 42
 mixta 42, 45, 108
 nombres 42
 operaciones con 59
 orden 49
 porcentajes como 309
 razones como 309
 significados 46
 simplificación 45
 fracción decimal 52
 orden 59
 ft, abreviación de pie 172
 furlong 171

G

g (constante) 198
 gal, abreviación de galón 172
 galón 172, 174
 GB 174
 gigabyte 174, 175
 gradiente 205
 gramo 166
 griego, alfabeto 199

H

hectárea 170
 hecto- 166
 homonimia 187, 206
 hora 175

I

$i=1,...,n$ 213

i-ésimo(a) 213
 igual 22, 24, 60, 80
 in, abreviación de pulgada 172
 inclusión de un conjunto en otro
 204
 incógnita 194
 índice 311
 infinito 86, 87, 203
 integral 205
 intersección de dos conjuntos 204
 intervalo 79, 82, 86, 87
 abierto 83
 cerrado 84
 de números reales 82, 86, 87
 extremos 82
 límites 82
 pertenencia de un número 83
 semiabierto 84
 semicerrado 84
 uso de corchetes [] 84
 uso de paréntesis () 83

J

j-ésimo(a) 217
 jerarquía de las operaciones 224

K

KB 174
 kilo- 166
 kilobyte 174, 175
 kilogramo 166

L

lb, abreviación de libra 173
 letras 187, 198, 200
 libra 173, 174

literal 193

litro 166

llaves 203, 246

M

matriz 208

mayor 23, 24, 33, 50, 64, 80, 86, 87
o igual 24, 80, 86, 87

MB 174

medición, unidades estadounidenses 171

megabyte 174, 175

menor 23, 24, 33, 50, 64, 80, 86, 87
o igual 24, 80, 86, 87

mes 175

metro 166

cuadrado 166

cúbico 166

mi, abreviación de milla 172

micro- 166

milésimos 54

mili- 166

milla 171, 173

náutica 173

millar 19

millón 19

minuto 175

multiplicación 95, 103, 110, 203
de enteros 113
de naturales 113
de racionales 113
de reales 113
notación de la 95
por cero 115, 135
por potencias de diez 138, 140

significado matemático de la-
101
uso de la 120
uso de la calculadora- 95

N

N 76, 112, 201

natural, número 18

división de - 92

multiplicación de - 113

potenciación de - 113

radicación de - 113

resta de - 113

sistema de numeración 18

suma de - 113

negativo, número 30

operaciones con 92, 243

n-ésimo(a) 168

notación científica 142

nudo 173

nueve periódico 59

numeración, sistema de 18, 53

numerador 40

número 18, 87

0 21, 30

cero 21, 30

complejo 76

decimal 52, 74, 76

desigualdad 24, 26, 80, 86, 87

entero 18, 76

fraccionario 39

fracción 40

fracción como 46

fracción decimal 52

natural 18, 76

negativo 30, 66, 93

operaciones 113

orden 23, 29, 32, 35, 49, 51, 60,
67, 77, 79

porcentaje como 309
 positivo 30, 66
 racional 39, 76
 real 74, 76
 redondeo 145, 148, 251, 253
 sin signo 30
 sistema de numeración 19, 53
 valor absoluto 35, 120

número negativo 30
 operaciones con - 74, 243

O

o 205
 onza 173, 174
 onza común 174
 onza líquida 174
 onza troy 174
 operaciones 91, 186
 con el número 0 115, 118, 135
 con el número 1 116, 136
 con fracciones 59
 con números negativos 93, 244
 con números positivos y negativos 92
 imposibles 97, 100, 105, 113,
 115, 116, 135
 jerarquía 256, 224, 181
 orden en que se hacen 206, 224,
 181
 propiedades de las 112
 significado de 118, 126
 operador
 el porcentaje como 256
 la fracción como 47
 orden 23, 29, 32, 35, 49, 51, 60, 67,
 77, 79
 de las fracciones 49
 de las fracciones decimales 60
 de los factores 114

de los números 23, 29, 32, 34, 49,
 55, 60
 de los números con calculadora
 23, 32, 50, 64
 de los números negativos 23
 de los números reales 77
 de los sumandos 114
 en que se hacen las operaciones
 224
 en que se usan las teclas 12
 oz, abreviación de onza 173

P

para todo 205
 paralela 205
 paréntesis 203, 204, 206, 243
 angulares 203
 para denotar combinaciones 208
 para denotar funciones 207
 para denotar intervalos 83, 207
 para denotar jerarquía de las
 operaciones 206, 225, 243
 para denotar matrices 208
 para denotar multiplicación 95,
 203, 206
 para denotar números negativos
 30, 206
 para denotar el orden en que se
 hacen las operaciones 206,
 225, 243
 para denotar parejas ordenadas
 207
 para denotar probabilidades 207
 para denotar puntos en el plano
 cartesiano 207
 para denotar subíndices 207, 208
 para operaciones arriba o abajo
 de una raya de fracción 243
 para operaciones con números
 negativos 30, 102, 104, 105,
 106, 107, 108, 230

- para operaciones dentro de una raíz 231, 243
- teclas 11
- uso como en español en fórmulas 207
- uso para operaciones con fracciones 46
- perpendicular 205
- pertenencia 83
- pertenencia de un elemento a un conjunto 204
- pi 198
- pie 172
- por lo tanto 205
- porcentaje 306, 309, 310, 323
 - cálculos con calculadora 310
 - como cociente 309
 - como constante de proporcionalidad 309
 - como fracciones 309
 - como números 309
 - como números decimales 309
 - como operadores 309
 - como razones 309
 - interpretación 311, 325
 - mayores de 100 312
 - operaciones con 314
 - significado 306
 - tipos de problemas 315, 318, 323
- potencia 97
 - de diez 52, 136, 138, 139, 142, 167
- potenciación 97, 106, 111
 - de cero 115, 118, 135
 - de enteros 113
 - de naturales 113
 - de racionales 113
 - de reales 113
 - exponente 97
 - notación de la 97
 - significado matemático de la - 101
 - uso de la 122
 - uso de la calculadora 97
- prima 205
- producto 95
- productos cruzados 43
- promedio 196
- propiedades
 - de la variación proporcional 278, 280
 - de las operaciones 112
- proporción 233, 285
 - como equivalencia de razones 286
- problemas de comparación de razones 294, 299
- problemas de cuarta proporcional 294, 295
- problemas de reparto proporcional 294, 300
- problemas de valor perdido 294, 295
- proporcional
 - cuarta 294, 295
 - de reparto 294, 300
 - variación 273, 278, 280
 - variación inversamente 283
- proporcionalidad 272, 273, 280
 - constante 273, 279, 283
 - directa 273, 278
 - inversa 282
- pt, abreviación de pinta 172
- pulgada 172, 173
- punto
 - decimal 18, 52
 - para denotar multiplicación 95, 203
 - porcentual 312

Q

Q 76, 112, 201

qt, abreviación de cuarto (unidad de medida de capacidad)
172

qtr, abreviación de cuarto (unidad de medida de masa o peso)
173

R

R 76, 112, 201

racional, número 39, 76

división de - 113

multiplicación de - 113

potenciación de - 113

radicación de - 113

resta de - 113

suma de - 113

radicación 99, 106, 111

con radical par de un número negativo 100, 107, 113, 117

de enteros 113

de naturales 113

de racionales 113

de reales 113

notación de la 99

radical 99

significado matemático de la - 101

uso de la - 123

uso de la calculadora- 99

radical 99

par. Ver raíz par

raíz 99, 243

cuadrada 99

cuarta, quinta, etc 99

cúbica 99

de un número negativo 100, 107, 113, 117

impar, de un número negativo 107

operaciones dentro de 231

par, de un número negativo 100, 107, 113, 117

par, de un número positivo 107

raíz cuadrada 12, 99, 231. Ver

radicación

de cero 116

de un número negativo 100, 107, 113, 117

tecla 12, 99

raya de fracción 40, 96, 203, 230, 242, 243

razón 48, 286, 294

equivalencia 286

como fracción 309

comparación de 299

fracciones como 48

real, número 74, 76

división de - 113

multiplicación de - 113

orden 77

potenciación de - 113

radicación de - 113

resta de 113

suma de 113

recta

numérica 27, 29, 32, 35, 49, 51, 65, 76, 77, 78, 146

redondeo 145, 156, 163, 251, 253
a decenas, centenas, millares, etc. 149

a décimos, centésimos, milésimos, etc. 147, 148

cantidad de cifras 151

de números negativos 149

de números redondeados 150

- sentido práctico 153
 uso de los símbolos $= y \approx$ 150
 regla de tres 296, 297
 reparto proporcional 294, 300
 resta 94, 102, 109, 203
 de enteros 113
 de naturales 113
 de racionales 113
 de reales 113
 notación de la 94
 significado matemático de la
 - 101
 uso de la - 119
 uso de la calculadora 94
 rod 171
- S**
- segundo 175
 sexagesimal, división de la unidad
 176
 SI 161, 164, 165
 siglo 175
 significado matemático de las
 operaciones 100
 símbolos 201, 202, 203, 204, 205,
 206, 242. Ver listado al
 principio de este índice
 matemáticos 202
 simplificación de fracciones 45
 sinonimia 187, 206
 sistema de numeración 18, 22,
 53, 55
 sistema estadounidense de medi-
 das 171
 Sistema internacional de medidas
 141, 142, 164
 Sistema internacional de unidades
 141, 142, 164
- Sistema Métrico Decimal 165
 SMD 165
 sq yd, abreviación de yarda cua-
 drada 172
 st, abreviación de stone (unidad
 de medida de masa o peso)
 173
 subíndice 196, 200, 212
 suma 93, 102, 109, 113, 214
 de enteros 113
 de naturales 113
 de negativos 93
 de racionales 113
 de reales 113
 notación de la 74
 significado matemático de la 100
 uso de la 118
 uso de la calculadora 74
 sumando 93
 sumatoria 212, 214, 215, 217
 superíndice 206
- T**
- tal que 204
 tantos por cien 307, 308
 tantos por diez mil 311
 tantos por mil 311
 tasa 311
 TB 174
 teclas 11, 13. Ver listado al princi-
 pio de este índice
 de operaciones 11
 orden en que se usan 12
 para corrección de errores 258
 paréntesis 11, 43
 símbolos arriba de las - 12, 13
 uso principal y secundario 11

terabyte 174, 175

tiempo

medición del 175

tonelada 168

tres, regla de 296, 297

triángulo 161

trillón 235

truncar 150

U

único 205

unidad 19, 39

de medida 193, 209

de medida para el dinero 194

unión de dos conjuntos 204

unitario, valor 278

sentido de- 279, 280

uno, operaciones con 136

V

vacío, conjunto 204

valor

absoluto 35, 120

de una variable 190

perdido 294, 295

unitario 278, 279, 280

variable 190, 197

variación

inversamente proporcional 283

proporcional 273, 278, 280

vector 205

X

xi 213

Y

y 205

yarda 172, 173

yd, abreviación de yarda 172

Z

$\mathbb{Z}$ 76, 112, 201

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

Leticia Ramírez Amaya *Secretaría de Educación Pública*

Francisco Luciano Concheiro Bórquez *Subsecretaría de Educación Superior*

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

Rosa María Torres Hernández *Rectoría*

María Guadalupe Olivier Téllez *Secretaría Académica*

Karla Ramírez Cruz *Secretaría Administrativa*

Rosenda Ruiz Figueroa *Dirección de Biblioteca y Apoyo Académico*

Cristina Leticia Barragán Gutiérrez *Dirección de Difusión y Extensión Universitaria*

Benjamín Díaz Salazar *Dirección de Planeación*

Maricruz Guzmán Chiñas *Dirección de Unidades UPN*

Yiseth Osorio Osorio *Dirección de Servicios Jurídicos*

Silvia Adriana Tapia Covarrubias *Dirección de Comunicación Social*

COORDINACIONES DE ÁREA

Tomás Román Brito *Política Educativa, Procesos Institucionales y Gestión*

Jorge García Villanueva *Diversidad e Interculturalidad*

Gerardo Ortiz Moncada *Aprendizaje y Enseñanza en Ciencias, Humanidades y Artes*

Ruth Angélica Briones Fragoso *Tecnologías de la Información y Modelos Alternativos*

Eva Francisca Rautenberg Petersen *Teoría Pedagógica y Formación Docente*

Rosalía Menéndez Martínez *Posgrado*

Rosa María Castillo del Carmen *Centro de Enseñanza y Aprendizaje de Lenguas*

COMITÉ EDITORIAL UPN

Rosa María Torres Hernández *Presidencia*

María Guadalupe Olivier Téllez *Secretaría Ejecutiva*

Cristina Leticia Barragán Gutiérrez *Coordinación Técnica*

VOCALÉS ACADÉMICAS

Laura Magaña Pastrana

Esperanza Terrón Amigón

Alma Eréndira Ochoa Colunga

Mariana Martínez Aréchiga

Rita Dromundo Amores

Maricruz Guzmán Chiñas

Mildred Abigail López Palacios *Fomento Editorial*

María Eugenia Hernández Arriola *Formación*

Jorge Núñez Silva *Ilustración*

Jesica Coronado Zarco *Diseño de portada*

Fernando Eugenio López *Edición y corrección de estilo*

Esta primera edición de *Educación ambiental. Aritmética y algo más para estudiantes de ciencias sociales* estuvo a cargo de Fomento Editorial de la Dirección de Difusión y Extensión Universitaria, de la Universidad Pedagógica Nacional y se publicó el 17 de marzo de 2023.